La armonía es numérica

Música y matemáticas

Javier Arbonés - Pablo Milrud



El mundo es matemático

La armonía es numérica

La armonía es numérica

Música y matemáticas

Javier Arbonés - Pablo Milrud

El mundo es matemático

© 2010, Javier Arbonés y Pablo Milrud por el texto
© 2012, RBA Contenidos Editoriales y Audiovisuales, S.A.
© 2012, RBA Coleccionables, S.A.

Realización: EDITEC
Diseño cubierta: Llorenç Martí
Créditos fotográficos: Gettyimages, iStockphoto

Reservados todos los derechos. Ninguna parte de esta publicación puede ser reproducida, almacenada o transmitida por ningún medio sin permiso del editor

ISBN: 978-84-473-6961-4
Depósito legal: NA-1081-2011

Impreso y encuadernado en Rodesa, Villatuerta (Navarra)

Impreso en España - *Printed in Spain*

Sumario

Prefacio 8

Capítulo 1. Tensando la cuerda 11
El mundo griego 11
El sistema musical pitagórico 12
Afinación absoluta 14
Intervalos y afinación relativa 16
Para afinar un piano 20
La escala pitagórica 20
Haciendo las cuentas 22
La coma pitagórica 24
Otras afinaciones 25
Escala diatónica 26
Por algún lugar, siempre se complica... 27
Todos contentos 28
Cents 31
Conmensurabilidad 32

Capítulo 2. La otra dimensión: el tiempo 37
Agrupamientos rítmicos. Ritmo, pulso, acentos 37
De Grecia a las primeras figuras proporcionales 38
Perfectum/imperfectum 40
Percusión: el ritmo puro 44
Cubriendo el «espacio» sonoro 46
El compás. Métricas. Subdivisiones 50
El acento y el compás 50
Tipos de compás 50
Irregularidades 52
Ritmos en estratos 54
Amalgamas 54
La velocidad: el metrónomo 55
Irregularidades aisladas 57

La notación moderna 59
Sin escala 60

Capítulo 3. La geometría de la composición 61
Altura + ritmo: el plano musical 62
Los elementos de la escritura musical 62
El pentagrama 62
Las figuras 64
Consignando las alturas 65
Las claves 65
Variando semitonos 68
La curva melódica 68
Transformaciones geométrico-musicales 69
Transformaciones isométricas 71
Traslaciones 71
Traslación horizontal: repetición y canon 72
Traslación vertical: transporte 73
Reflexiones 76
Reflexión sobre un eje vertical: retrogradación 77
Reflexión sobre un eje horizontal: inversión 78
Rotaciones 81
Combinadas 83
Traslación horizontal más traslación vertical: el canon a intervalos 83
Traslación vertical más reflexión sobre un eje vertical: traslación retrógrada 84
Traslación vertical más reflexión sobre un eje horizontal: transporte invertido 84
Transformaciones escalares 88
Escalar en lo horizontal 89
El *Requiem alemán* de Johannes Brahms 90
«Puttin' on the Ritz» 90
Escalar en lo vertical 91
Simetrías armónicas 92
Acordes simétricos 92
Escalas simétricas 93
La matemática de la forma musical 95

ABCDE... 96
La *Misa en Si menor* de Bach 97
El número de oro y la música 99

Capítulo 4. Ondas y bits 103
La física del sonido 103
Tono puro y tono real 107
Superposición de ondas 109
La función de los armónicos 110
Síntesis de sonido 111
Audio digital 112
Digitalización 113
De vuelta a lo analógico 114
Compresión 116
Audio «crudo» 116
A comprimir 116
Métodos de compresión 117
MIDI 118
La orquesta 120
Cuantización 120

Capítulo 5. Matemática para componer 121
Igualitarismo tonal: el dodecafonismo 121
Qué es el dodecafonismo 122
Series 123
Forma numérica y forma matricial 125
Forma circular 127
Alban Berg 130
Serialismo, control y caos 131
Música estocástica 133
Un juego de dados con Mozart 134
¿Cuántas obras? 135
Copiando a los grandes 136
El cumpleaños de Markov 137
El segundo cumpleaños 139
EMI 140

Mecanizar 140
Inspiración 141
Composición algorítmica 142

Anexo I. Conceptos básicos de escritura y de teoría musical 143

Anexo II. Una segunda mirada al rol del tiempo en la música 155

Bibliografía 157

Índice analítico 158

Prefacio

La música es el placer que experimenta la mente humana
al contar sin darse cuenta de que está contando.
Gottfried Wilhelm von Leibniz

El panorama musical del mundo en los albores del siglo XXI es fantástico. Diverso. La matemática, la electrónica, los bits y los bytes parecen dispuestos a compartir la vida con la música, acompañándola hacia nuevas fronteras. ¿Era menos diverso y fantástico a comienzos del siglo XX? ¿Y en el siglo X? ¿Y 1.000 años antes de Cristo? ¿Eran ya estudiados matemáticamente los sonidos en la Antigüedad? ¿Influyó en la música la tecnología del siglo XIX?

La música es una de las principales manifestaciones culturales de la humanidad, y se extiende por doquier, tanto en lo geográfico como en lo histórico. Allí está siempre, y en todo lugar, para conmover y disfrutar. Las matemáticas analizan el fenómeno y aportan su potencial a un sinfín de ámbitos del quehacer musical: las relaciones entre los sonidos de un acorde, los fenómenos de resonancia, las claves secretas de la partitura, los juegos musicales, las estructuras geométricas. Quienes sepan disfrutar de las matemáticas podrán sumar, al placer y la emoción de ser oyentes, el deleite y la sorpresa por el ingrediente matemático.

Veremos cómo Mozart expone un método para componer utilizando dados, y también obras que no se pueden interpretar, a menos que se resuelva un enigma. El azar, los fractales y el número de oro también tienen su lugar en el pentagrama. ¿Por qué hay sonidos disonantes y sonidos armónicos? ¿Por qué es posible distinguir un violín de una trompeta? ¿Puede romper una cantante una copa de cristal con su voz? ¿Cuáles son los aportes de la tecnología a la música? ¿Cómo adquirió su forma y a qué reglas obedece la notación musical moderna?

Si bien éstos y otros casos están nutridos de las matemáticas más diversas, es importante destacar que la ciencia no condiciona el fenómeno musical. Ahora bien, sí brinda un amplio abanico de herramientas para la creación, que también se exploran con detalle en el presente libro. En cualquier caso, con herramientas matemáticas o sin ellas, la clave de toda obra musical sigue estando en la mano inspirada y el arte del compositor. Y ahí reside, en último término, el valor que las matemáticas aportan al estudio de la música: la posibilidad de contemplar y admirar una forma artística desde bastidores; una nueva perspectiva desde la que descubrir con ojos nuevos aquello que creíamos conocer.

Capítulo 1

Tensando la cuerda

Después del silencio, lo que más se acerca
a expresar lo inexpresable es la música.
Aldous Huxley

El hecho musical es efímero, y tiene su existencia en la memoria. Ocurre en el tiempo y es aparentemente inasible. Estas características dotan a la música de un aura mágica que ha inducido al hombre a emplearla en sus rituales desde el principio de los tiempos, y la ha convertido en un vehículo privilegiado de adoración a la divinidad. Los hallazgos antropológicos revelan la presencia de instrumentos musicales a lo largo y ancho del globo ya en la Prehistoria: son muy numerosos los de percusión y las sonajas, pero también se han hallado flautas y trompetas primitivas que demuestran la presencia de la melodía en el quehacer musical de las culturas más antiguas.

El mundo griego

La palabra «música» tiene su origen en el vocablo griego *musiké,* literalmente, «el arte de las musas». En la mitología griega las musas eran las diosas inspiradoras de la música, la danza, la astronomía y la poesía.

La escuela pitagórica, activa desde el siglo VI a.C., buscaba comprender la armonía del universo, y consideraron a los números y sus relaciones la expresión última de esta armonía. A través de ellos diseñaron modelos astronómicos, acústicos y musicales, hasta el punto de que música y aritmética eran estudiadas en forma conjunta. Creían que los movimientos por el espacio de los planetas generaban vibraciones armónicas, imperceptibles para los humanos: la «música de las esferas».

Las civilizaciones grecorromanas, en general, cultivaban el conocimiento teórico como un saber aparte de las actividades manuales, denominadas «artes menores». A las disciplinas superiores se las reunía en dos grandes grupos: el primero, denominado *trivium* (de *tri,* «tres», y *vium,* «vía» o «camino»), estaba formado por la gramática, la dialéctica, y la retórica; el segundo, llamado *quadrivium* (de *quadri,*

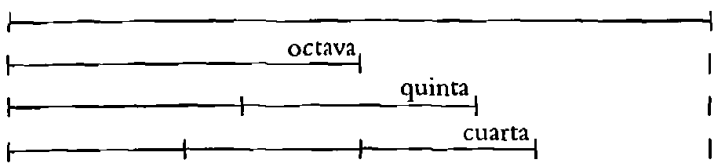
«cuatro»), estaba integrado por la aritmética, la geometría, la astronomía y la música. Éstos son los siete caminos que podían hacer que el hombre se mantuviera en equilibrio con un universo en armonía, las «siete artes liberales».

El sistema musical pitagórico

Los estudios de la escuela pitagórica en el terreno de la música fueron creados en base a los sonidos producidos al tañer la única cuerda de un instrumento monocordio. La longitud de su cuerda era modificada de manera muy similar al modo en que se pisa la cuerda de una guitarra moderna. Al variar la longitud de la cuerda, ésta generaba distintas notas musicales. Cuanto más corta era la cuerda, la nota resultante era más «alta» o aguda. De manera metódica, los pitagóricos compararon por pares los sonidos producidos con distintas longitudes de cuerda. Sus experimentos involucraban relaciones de longitudes expresadas con números pequeños: dividiendo la cuerda a la mitad, a la tercera parte, a dos tercios de la longitud original, etcétera.

Los resultados fueron sorprendentes: los sonidos provocados por cuerdas de largos relacionados con números pequeños generaban los sonidos más agradables, es decir, los más armónicos al oído. Gracias a estas observaciones, los pitagóricos lograron establecer un modelo matemático de un fenómeno físico, pero teniendo la mirada puesta en lo estético, algo similar a lo ocurrido con la proporción áurea y el concepto de belleza en el Renacimiento.

La relación más sencilla es la que se obtiene al pisar la cuerda en la mitad de su longitud. Esta relación se expresa numéricamente 2:1, y musicalmente se corresponde con un intervalo de octava (por ejemplo, la distancia existente entre un *do* y el siguiente *do*). La siguiente relación de entre las más sencillas es aquella en la que la cuerda se pisa en un punto situado a un tercio de la longitud total; la expresión numérica de esta relación es 3:2, que musicalmente se corresponde con un intervalo de quinta (la distancia *do-sol*). A continuación tenemos aquella en la que se pisa la cuerda a un cuarto del total, lo que numéricamente se expresa con la relación 4:3, mientras que en el ámbito musical corresponde a un intervalo de cuarta (la distancia *do-fa*).



SONES PLANETARIOS

La noción de un cosmos en equilibrio fue uno de los aspectos de la cultura clásica que el humanismo renacentista pretendió recuperar. Una expresión de este equilibrio, defendida por los pitagóricos y explorada asimismo por Platón y Aristóteles, era la conocida como «armonía de las esferas», y consistía, en términos muy básicos, en la idea de que los planetas generaban sonidos inaudibles para los humanos en razón de su posición y movimiento, y que dichos sonidos eran consonantes, es decir, armónicos. El alemán Johannes Kepler (1571-1630) había estudiado religión, ética, dialéctica, retórica, y también física y astronomía. También accedió al conocimiento de la teoría heliocéntrica y era un estudioso de los legados pitagóricos y de Platón. A comienzos del siglo XVII, e incluso en ámbitos científicos, el movimiento de los planetas era un misterio que sólo encontraba respuesta en la voluntad de Dios. Kepler arrojó luz sobre dicho misterio, y las leyes de los movimientos planetarios establecidas por él se cuentan entre los grandes descubrimientos científicos de la historia. Pero sus teorías iban más allá, y pretendían recuperar la visión de la armonía de las esferas postulada por el mundo clásico. Así, en su obra *Harmonices Mundi* (*La armonía de los mundos*), de 1619, Kepler expuso, junto a sus estudios astronómicos, la tesis de que cada planeta emite un sonido en su circulación alrededor del Sol, determinado por su velocidad angular. Dicha velocidad angular tiene sus extremos en el perihelio (punto más cercano al Sol) y en el afelio (punto más alejado del Sol) de su trayectoria elíptica. Kepler comparó los sonidos en uno y otro extremo para un mismo planeta, y también entre planetas próximos. Llegó a plantear escalas y acordes asociados a cada uno de ellos. Según sus cálculos, las melodías de Venus y de la Tierra variaban en un intervalo de un semitono o menos; en el otro extremo, Mercurio ampliaba su intervalo máximo mas allá de una octava. La religiosidad de Kepler le hizo sostener que muy pocas veces los planetas habían sonado en armonía; tal vez, pensaba, sólo en el momento de la Creación.

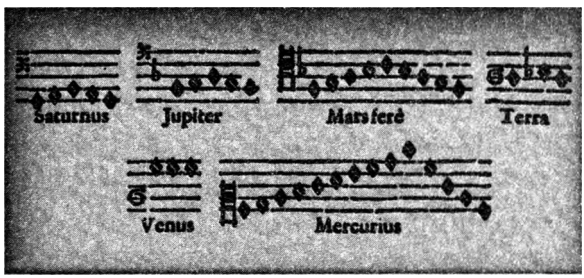


Imagen del Harmonices Mundi *de Kepler que muestra los supuestos sonidos producidos por los planetas.*

PITÁGORAS DE SAMOS (582 A.C.-496 A.C.)

Pitágoras nació en la isla griega de Samos. Inspirado por el filósofo y matemático Tales de Mileto, emprendió un extenso viaje de aprendizaje por Egipto y Mesopotamia. La experiencia vivida y las ideas que aquel viaje despertaron en él lo llevaron a fundar una escuela de pensamiento en la que convivían distintas disciplinas científicas, estéticas y filosóficas. Pitágoras y sus seguidores realizaron importantes estudios en ámbitos tan diversos como la acústica y la música, la aritmética, la geometría y la astronomía. El prestigio de Pitágoras y su escuela era tal que históricamente se le atribuye la paternidad de uno de los teoremas fundamentales de la geometría, el teorema de Pitágoras, si bien éste era ya conocido, varios siglos antes, por las civilizaciones orientales más importantes de la Antigüedad. Si resumimos el teorema de Pitágoras mediante la fórmula

$$a^2 + b^2 = c^2$$

obtenemos una ecuación de infinitas soluciones enteras. Cada conjunto de soluciones recibe el nombre de «terna pitagórica». Todo conjunto de tres elementos que determinen una terna pitagórica dibuja una escuadra, instrumento empleado por agricultores y artesanos para trazar ángulos rectos.

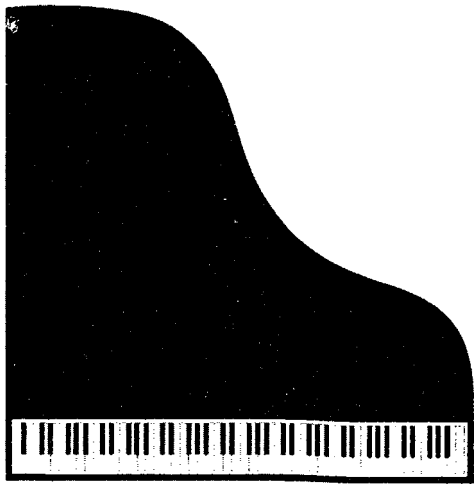
Así, asistimos a la emergencia de un patrón según el cual los intervalos de sonidos relacionados por fracciones de la forma

$$\frac{n+1}{n}$$

son armónicos y agradables. Esto fue interpretado por los pitagóricos como una confirmación de la relación directa entre el número y lo armónico, lo bello.

Afinación absoluta

Para apreciar mejor la potencia de los descubrimientos pitagóricos conviene hacer una distinción entre dos conceptos clave: la afinación «absoluta» y la afinación «relativa». Cada nota musical tiene una altura, que permite identificarla como más grave o más aguda. La altura de una nota está determinada por la frecuencia de oscilación de su onda sonora (volveremos a tratar esto más adelante). A mayores frecuencias, sonidos más agudos. (En el anexo I se ofrece una explicación detallada de éstos y otros conceptos musicales.)



En un piano las teclas correspondientes a las notas más graves se disponen a la izquierda, mientras que a la derecha se encuentran las más agudas.

DE COPAS QUE ESTALLAN Y PUENTES QUE SE HUNDEN

En numerosas películas y series de animación se observa cómo una cantante lírica, al emitir un sonido muy agudo, logra romper una copa de cristal. No se trata de ningún hecho físico ficticio, sino absolutamente real. Los cuerpos rígidos pueden vibrar a una determinada frecuencia que los caracteriza y que depende del material del que están constituidos, de su forma y de otras particularidades. Además, se cuenta con una fuente sonora que produce un sonido que llega al objeto en forma de ondas fluctuantes de presión de aire, haciendo que aquél vibre. Pero existe una situación especial que ocurre cuando la frecuencia del sonido emitido es la misma que la del objeto: este último comienza a vibrar con más intensidad y se produce el fenómeno llamado «resonancia». Si al fenómeno de resonancia se suma un aumento de la energía (volumen) de la fuente sonora, la amplitud de las vibraciones del cuerpo aumentará todavía más. En el caso de una cuerda, la flexibilidad propia del material le permitirá soportar esos vaivenes. Si, en cambio, se trata de un cuerpo muy rígido, no podrá absorber las vibraciones y acabará rompiéndose. Esto es lo que ocurre con la copa de cristal. Es conocido el caso del Tacoma Narrows, un puente de suspensión que el 7 de noviembre de 1940, unos pocos meses después de su inauguración, se desplomó sobre las aguas del estuario de Puget, en el estado norteamericano de Washington, por oscilaciones inducidas por el viento, fenómeno conocido como «flameo».

El oído humano es capaz de percibir vibraciones con frecuencias en un rango aproximado de entre 20 y 20.000 hercios (Hz) o ciclos por segundo. Por debajo de este rango de frecuencias se sitúan los infrasonidos, y por encima de él, los ultrasonidos. La frecuencia de cada nota es un valor absoluto, que la identifica de manera unívoca. Es un hecho conocido que «el *la* se afina en 440 Hz», pero conviene tomar este dato con cautela: una cosa es el sonido cuya frecuencia es de 440 Hz, y otra, el nombre que se adjudica a ese sonido. El hecho de que a ese sonido se le haya asignado el nombre de *la* es convencional. En este sentido, es tan arbitrario como el metro patrón que rige el sistema métrico decimal, y su fijación siguió un proceso similar. En el año 1939, la Segunda Conferencia Internacional para el Diapasón, reunida en Londres, fijó el diapasón normal *la*, también llamado tono de referencia, en 440 Hz. Este valor no estaba unificado anteriormente, y varió en distintas épocas y lugares y hasta para distintos lutieres. En la actualidad, distintas orquestas de todo el mundo aún prefieren fijar su *la* en otras frecuencias, llegando en algunos casos hasta los 444 Hz o más.

PROBLEMAS CON EL PRIMO

En los primeros años del siglo XX, el estándar inicial para el diapasón normal *la* era de 439 Hz. ¿Por qué terminó definiéndose en 440 Hz? Según una hipótesis de un miembro del Instituto Británico de Estándares, «el tono de afinación que daba la B.B.C. parte de un oscilador controlado por un cristal piezoeléctrico que vibra con una frecuencia de un millón de hercios. Esto se reduce a una frecuencia de 1.000 Hz con divisores electrónicos, luego se multiplica por 11 y se divide por 25, de modo que se produce la frecuencia requerida de 440 Hz. Como 439 es un número primo, una frecuencia de dicho valor no puede ser obtenida por medios similares».

Intervalos y afinación relativa

Antes de abordar la noción de afinación relativa, deberemos familiarizarnos con la de «intervalo». Como acabamos de ver, cada nota tiene una frecuencia propia, que la identifica respecto de cualquier otra. Los pitagóricos, sin embargo, no analizaron cada nota por separado, sino mediante las relaciones existentes entre ellas. Dadas dos notas cualesquiera, éstas se encuentran separadas por una distancia llamada «intervalo». De nuevo conviene distinguir entre dos maneras de abordar dicho concepto. Una de ellas es pensar en los intervalos como la distancia musical que hay entre dos

notas. Cada intervalo se nombra por la cantidad de notas por las que hay que pasar para llegar de una a otra, y por el sentido del recorrido. Así, para llegar de *do* a *fa* hay que pasar por cuatro notas: *do-re-mi-fa*. El intervalo *do-fa* se dice que es «de cuarta» o, sencillamente, «una cuarta». O bien se dice que *do* y *fa* son dos notas que están «a la cuarta». Una octava, intervalo que ya conocemos, sigue ese mismo criterio: para ir de un *do* al siguiente *do* hay que pasar por ocho notas: *do-re-mi-fa-sol-la-si-do*. Los intervalos citados hasta ahora son ascendentes. Los descendentes se recorren comenzando por la nota más aguda y contando en sentido inverso: un intervalo *do-la* es una tercera si se piensa de manera descendente: *do-si-la*. (La clasificación de los intervalos es algo más compleja, y se detalla en el anexo I.)

La otra manera de pensar en los intervalos es la numérica, mediante la comparación proporcional de las frecuencias de cada nota. Dos notas mantienen entre sí una afinación relativa, de manera que lo importante no es la frecuencia absoluta de cada una, sino la proporción numérica entre las frecuencias de dos notas distintas.

Esto permite comparar dos notas refiriendo el intervalo que las separa mediante la razón numérica que vincula sus frecuencias. Si, por ejemplo, hacemos sonar dos notas a un intervalo de una cuarta, la más aguda tendrá una frecuencia igual a

CRECIMIENTO LINEAL VS. CRECIMIENTO EXPONENCIAL

Al nombrar un intervalo se cuenta la cantidad de notas que hay entre las dos involucradas, incluyéndolas. Esto hace que la suma de estos intervalos resulte una operación contraintuitiva. ¿Cuánto suman una segunda y una tercera? ¿Suman una quinta? Basta con hacer unas cuentas para comprobar que no es así. Fijemos un *do* como inicio de la suma. Al sumar una segunda, se pasa de *do* a *re*. Al sumar una tercera, se pasa de *re* a *fa*. La suma no es entonces una quinta, sino una cuarta.

La suma de intervalos sigue una cierta linealidad. Si numeramos las teclas de un piano, comenzando con un 1 para el *la* más grave hasta llegar al 88 en el *do* más agudo, veremos que las teclas *la* tienen los números 1, 8, 15, 22, 29... Es decir, que para pasar de un *la* al siguiente hay que aumentar una cantidad fija de siete teclas. Sin embargo, cuando lo que se tiene en cuenta no es la tecla sino las frecuencias absolutas correspondientes a esas mismas notas, veremos que el crecimiento no es lineal, sino exponencial. Así, el *la* más grave del piano se afina en 27,5 Hz. Para pasar al siguiente *la*, la frecuencia no debe aumentar en una cantidad fija, sino que debe multiplicarse por 2, de modo que el siguiente *la* se afinará en 55 Hz, el siguiente, en 110 Hz, y así sucesivamente.

4/3 de la frecuencia de la más grave. Si entre los dos sonidos hay una quinta, la relación entre sus frecuencias será de 3/2. Por ejemplo, a partir de un *la* de 440 Hz, el *mi* que se encuentra a una quinta superior se afina en 660 Hz.

La relación entre las longitudes de dos cuerdas es la inversa de la relación de las frecuencias de esas cuerdas. Por ejemplo, dos cuerdas dan nota a la quinta, o 3/2, si sus longitudes están en relación 2/3. A partir de ese punto, abandonaremos toda referencia a las longitudes de cuerdas y trabajaremos sólo con frecuencias.

Así, dos notas cuyas frecuencias son 440 Hz y 880 Hz se encuentran en perfecta relación de octava, y su afinación se corresponde con el *la* oficial. Dos notas cuyas

LA MALDICIÓN DEL OÍDO ABSOLUTO

El oído absoluto es una habilidad que permite a quien la posee identificar el nombre de las notas que escucha, sin necesitar ninguna otra referencia: alguien toca una tecla cualquiera del piano, y una persona con oído absoluto puede reconocer qué nota es. No hay una relación directa entre tener oído absoluto y un potencial talento musical. De hecho, muchos músicos resultan ocasionalmente perjudicados por poseer oído absoluto. Por ejemplo, en el ámbito de la música coral es muy común transportar las partituras para adaptarlas al tono que mejor le va al coro. Esto se realiza, por ejemplo, comenzando el canto un semitono por debajo de lo escrito, pero leyendo la misma partitura. Así, las notas cantadas no se corresponden con las leídas, lo que muchas veces causa un conflicto a la persona que posee oído absoluto, a quien no le resulta sencillo manejar la diferencia entre lo que lee y lo que escucha.



frecuencias son 442 Hz y 884 Hz también se encuentran perfectamente afinadas entre sí en relación de octava, aunque su afinación no se corresponda con el *la* oficial de 440 Hz. Finalmente, dos notas cuyas frecuencias son 443 Hz y 887 Hz no se encuentran afinadas en perfecta relación de octava, aunque al oído su relación se reconoce perfectamente como de «octava no afinada».

El vínculo proporcional entre las frecuencias de dos notas permite, a partir de un sonido conocido, calcular otro situado a la distancia del intervalo que se desee, multiplicando el primero por el factor correspondiente. Conocida una frecuencia F_1, esta relación permite calcular la frecuencia F_2 que se encuentra una cuarta por encima, es decir, a 4/3, del modo siguiente:

$$F_2 = F_1 \cdot \left(\frac{4}{3}\right).$$

Este cálculo se puede «encadenar» consigo mismo sucesivas veces, multiplicando los factores correspondientes. Por ejemplo, si F_3 está a la tercera mayor superior (que involucra una relación de frecuencias de 5/4) de F_2, es posible calcular la relación entre F_3 y F_1 realizando las sustituciones del caso:

$$F_3 = F_2 \cdot \left(\frac{5}{4}\right);$$

$$F_3 = \left[F_1 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)\right] \cdot \left(\frac{5}{4}\right);$$

$$F_3 = F_1 \cdot \left[\left(\frac{4}{3}\right) \cdot \left(\frac{5}{4}\right)\right];$$

$$F_3 = F_1 \cdot \left(\frac{5}{3}\right).$$

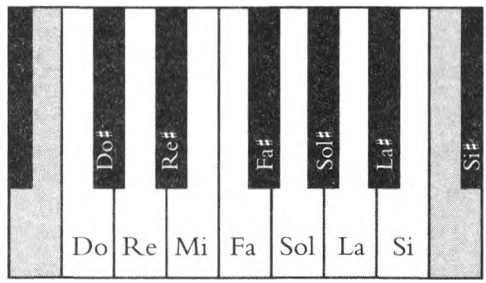
Los cálculos también pueden hacerse en sentido inverso, dividiendo en lugar de multiplicar. Por ejemplo, la frecuencia F_4, que está una quinta por debajo de F_1, se calcula del siguiente modo:

$$F_4 = \frac{F_1}{(3/2)}.$$

Ambas formas de pensar los intervalos (es decir, su forma musical y numérica) están íntimamente relacionadas. En adelante usaremos una u otra según convenga.

Para afinar un piano

Nos enfrentamos a la tarea de determinar la afinación de las doce notas de una octava de un piano.



Para ello tendremos en cuenta el procedimiento llamado de «cancelación de octavas»: una vez determinada la afinación de un *re*, la trasladaremos a todos los otros *re* del piano, multiplicando o dividiendo su frecuencia por 2. Y lo mismo con todas las demás notas existentes.

El *do* tendrá un valor inicial normalizado de 1. A partir de él, a cada una de las demás notas les corresponderá un valor entre 1 (ese *do*) y 2 (el *do* siguiente), que se corresponderá con la frecuencia proporcional de la nota con respecto a ese *do* = 1. Habremos concluido en cuanto podamos determinar los valores de todas las demás notas. Todos los calculos pueden ser replicados a partir de cualquier otro valor inicial (por ejemplo, a partir de un *la* de 440 Hz).

Las doce notas indican que para llegar de un *do* al siguiente habrá que dar doce pasos. A cada uno de ellos se le llama «semitono». Abordaremos el problema apelando, en primer lugar, a los descubrimientos hechos por los pitagóricos, siguiendo el método que utilizaban para afinar los instrumentos de la época.

La escala pitagórica

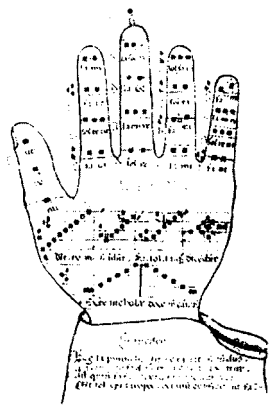
Los pitagóricos organizaron sus escalas basándose en simples relaciones numéricas entre los distintos sonidos. Así, la escala pitagórica se estructura sobre dos intervalos: la octava, que presenta una relación de frecuencias entre las notas de 2/1, y la quinta, de relación de frecuencias 3/2. Los pitagóricos obtuvieron los diferentes sonidos de la escala encadenando quintas, apelando luego a la «cancelación de octavas» para situar esas notas en el rango buscado.

EL NOMBRE DE LA NOTA

Los griegos nombraban las notas siguiendo las primeras letras del alfabeto jónico, asignando letras diferentes para un mismo sonido alterado en medio tono o doblemente ascendido. Por ejemplo, si el *fa* era alfa, beta era *fa sostenido*, y gamma, *fa doblemente sostenido*. Para ellos la escala se organizaba de manera descendente, al revés de como se la considera hoy. También los romanos utilizaban las primeras letras del alfabeto para nombrar los sonidos de su escala. Boecio, un estudioso que escribió en el siglo v un tratado en cinco volúmenes sobre teoría de la música, consideró una escala de quince notas que abarcaba dos octavas. Boecio designó cada una de esas notas con una letra diferente, ignorando el concepto cíclico de octavas. El paso siguiente en la historia del nombre de las notas fue, justamente, abrazar dicho concepto cíclico y designar con una misma letra las notas iguales de octavas distintas. Así, la denominada nomenclatura alemana o inglesa designaba las siete notas de la octava principal con letras de la A a la G, en mayúsculas; la siguiente octava, de la «a» a la «g», con minúsculas, y la tercera, con dobles letras minúsculas (aa, bb, cc, dd, ee, ff, gg). Así, siete de los doce sonidos, los correspondientes a las teclas blancas del piano, adquirieron nombre propio. Los otros cinco sonidos (las teclas negras) fueron nombrados con posterioridad, tras la aparición del concepto de bemol, becuadro y sostenido. Sus nombres no fueron ya propios, sino derivados de los siete básicos. En el siglo XI, el monje toscano Guido d'Arezzo (h. 995-h. 1050) dedicó buena parte de sus estudios musicales a crear reglas mnemotécnicas para los intérpretes. Tal vez la más conocida es la denominada «mano guidoniana», que ordenaba las notas en su notación alfabética asimilándola a un recorrido por la palma de la mano. Guido d'Arezzo rebautizó también las notas, asignando a cada sonido la primera sílaba de los versos de un himno a San Juan muy conocido por aquel entonces:

Ut queant laxis,
resonare fibris,
Mira gestorum,
famuli tuorum,
Solve polluti,
Labii reatum,
Sancte **I**ohannes.

Así, y tras el cambio de *ut* por *do*, nacieron los nombres de las siete notas de la escala según la emplean, entre otros, italianos, franceses o españoles.



Mano guidoniana extraída de un manuscrito medieval.

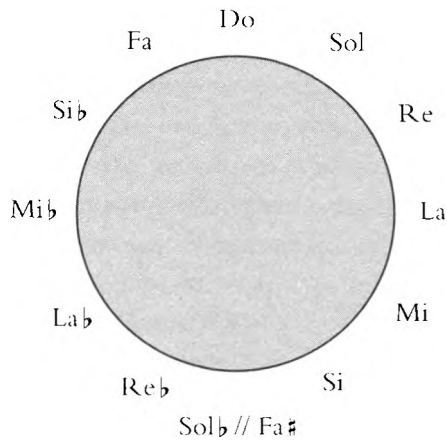
Partamos del *do* como ejemplo. En primer lugar, se calcula la relación de la primera quinta ascendente, para obtener el *sol*. Un nuevo encadenamiento nos llevará a un *re*, para seguir con un *la*, un *mi* y, finalmente, un *si*. Tomando ahora una quinta descendente desde el *do* inicial, se consigue el *fa*. De este modo se obtienen los siete sonidos de la escala:

$$fa \leftarrow do \rightarrow sol \rightarrow re \rightarrow la \rightarrow mi \rightarrow si.$$

Si se continúa con el encadenamiento de quintas, es posible alcanzar los doce sonidos de la llamada «escala cromática», conformando lo que se conoce como «círculo de quintas»:

$$sol\,\flat \leftarrow re\,\flat \leftarrow la\,\flat \leftarrow mi\,\flat \leftarrow si\,\flat \leftarrow fa \leftarrow do \rightarrow sol \rightarrow re \rightarrow la \rightarrow mi \rightarrow si \rightarrow fa\,\sharp.$$

donde los símbolos *bemol* (♭) y *sostenido* (♯) designan ajustes de un semitono inferior y superior, respectivamente.



Obtenidas las doce notas mediante sucesivos encadenamientos de quintas, bastará luego con situar los sonidos en la misma escala en el rango de una única octava mediante el procedimiento de cancelación de octavas.

Haciendo las cuentas

Ahora sí, vamos a determinar la afinación de cada nota por encadenamientos de quintas y «cancelaciones» de octavas (es decir, dividiendo o multiplicando por 2), de modo que, recordemos, el valor de sus frecuencias relativas se encuentre siempre

entre 1 (la relación que mantiene el *do* consigo mismo) y 2 (la relación que mantiene el *do* con el *do* de la siguiente escala).

Primero se determina el *sol*, que está a una quinta del *do*:

$$sol = \frac{3}{2}.$$

Luego el *re*, a una quinta del *sol* (multiplicando por 3/2), pero teniendo que cancelar una octava (multiplicando por 1/2):

$$re = sol \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2};$$

$$re = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2};$$

$$re = \frac{9}{8}.$$

La distancia de *do* a *re* se llama «tono», y, como era de esperar, es equivalente a dos semitonos.

Luego el *la*, a una quinta del *re*:

$$la = re \cdot \frac{3}{2};$$

$$la = \frac{9}{8} \cdot \frac{3}{2};$$

$$la = \frac{27}{16}.$$

El *mi*, a una quinta del *la*, pero teniendo que «cancelar» una octava:

$$mi = la \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2};$$

$$mi = \frac{27}{16} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2};$$

$$mi = \frac{81}{64}.$$

La escala se completa con el *si*, a una quinta del *mi*, y el *fa*, una quinta por debajo del *do*, y subiendo una octava (multiplicando por 2).

En resumen, y tomando el *do* con valor normalizado a 1:

Nota	Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
Relación de frecuencias	1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2

Este proceso se puede continuar para determinar las afinaciones de las teclas negras o bemoles, descendiendo por quintas desde el *fa*.

Nota	$Re_\flat$	$Mi_\flat$	$Sol_\flat$	$La_\flat$	$Si_\flat$
Relación de frecuencias	256/243	32/27	1024/729	128/81	16/9

La coma pitagórica

Al ascender una quinta de *si*, se llega al *fa*♯, que debería ser el mismo sonido que el $sol_\flat$ alcanzado en el otro extremo tras hacer las cancelaciones de octava correspondientes. Pero estos dos sonidos no son exactamente iguales: la diferencia entre el *fa*♯ y el $sol_\flat$ se denomina «coma pitagórica». Del mismo modo, tras hacer las cancelaciones de octava correspondientes, los sonidos extremos *fa*♯-$re_\flat$ no se encuentran a la distancia de una quinta justa, sino que forman un intervalo que difiere de ella en una coma pitagórica. Esta quinta ligeramente más pequeña se denomina «quinta del lobo».

El armado del círculo de quintas involucra el encadenamiento de doce quintas, llegando a una nota que es «casi» la misma que la del comienzo, sólo que a una distancia de siete octavas:



La coma pitagórica es ese «casi». Se puede calcular su valor (llamémoslo CP) partiendo de una frecuencia f y comparando el encadenamiento doce quintas a partir de f con el encadenamiento de siete octavas:

$$CP = \frac{f \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{12}}{f \cdot 2^7} = 1{,}013643265.$$

La diferencia es entonces de algo más de un 1% de una octava o, equivalentemente, casi un cuarto de semitono. Esta diferencia se debe a que el cálculo de la fracción que define la quinta es incompatible con la octava, como se demuestra fácilmente. Para ello, estudiemos si existen dos exponentes cualquiera, x e y, que nos permitan «casar» las dos fracciones:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = 2^y \Rightarrow$$

$$\frac{3^x}{2^x} = 2^y \Rightarrow$$

$$3^x = 2^x \cdot 2^y \Rightarrow$$

$$3^x = 2^{x+y}$$

De la última expresión se deduce que sería lo mismo que hallar un número que fuera a la vez potencia de 2 y de 3. Sin embargo, y dado que tanto 2 como 3 son números primos, ello contradiría el teorema fundamental de la aritmética, según el cual todo entero positivo tiene una única representación como producto de números primos. Este teorema, postulado por Euclides, fue demostrado de forma completa por primera vez por Carl Friedrich Gauss. De él se sigue que los intervalos de quintas y octavas definidos por los pitagóricos nunca se emparejarán, o lo que es lo mismo, que no hay escala cromática sin la coma pitagórica como inevitable compañera.

Otras afinaciones

Tanto la voz humana como los instrumentos de cuerda sin posiciones fijas (sin trastes) permiten la «afinación natural», o sea, aquella que produce una mayor consonancia entre sus notas, una mayor armonía. Esto es así en ambos casos porque tanto la una como los otros permiten modificar sutilmente la altura de los sonidos emitidos («corregir la afinación») para alcanzar una consonancia máxima. Como hemos visto, la escala pitagórica se construye a partir de una nota principal desde la que se determinan las demás por sucesivos encadenamientos de quintas «puras». Sin embargo, esto trae aparejados algunos inconvenientes «aritméticos» en la búsqueda de una buena consonancia: el primero, derivado de la incompatibilidad de los intervalos de octava y de quinta, da a luz a la ya mencionada quinta del lobo; el segundo aparece por causa de otra incompatibilidad, en este caso de las quintas con las terceras mayores.

En la escala pitagórica, la afinación de las terceras se obtiene por un encadenamiento de cuatro intervalos de quinta, lo que, cancelando octavas, se traduce numéricamente como un ratio de frecuencias 81:64. Sin embargo, hay otra forma de determinar la afinación de una tercera, la que sigue la simple relación 5/4 o, lo que es lo mismo, 80:64. Éstas son las terceras «puras».

De ello se deduce que la escala pitagórica, tomando partido por la afinación por encadenamiento de quintas, descuida la pureza de las terceras. En las teclas blancas de un piano hay tres de estas terceras: *do-mi*, *fa-la* y *sol-si*. Podría decirse que la escala pitagórica prefiere tener buenas quintas a costa de que las terceras no sean «puras».

Escala diatónica

La búsqueda de una afinación natural «pura» ha conducido a una nueva forma de organizar los sonidos y sus relaciones conocida como «escala diatónica». Así como la escala pitagórica calcula todos sus intervalos exclusivamente mediante encadenamientos de quintas, la diatónica tiene una organización más compleja.

Partiendo del *do*, respeta los intervalos de quinta para calcular las que considera como las siguientes dos notas más importantes de la escala: *fa* y *sol*. A continuación, calcula *mi*, *la* y *si* como terceras puras de *do*, *fa* y *sol*, respectivamente.

La escala se completa con el *re* afinado como una quinta justa a partir del *sol*:

Fa	←	Do	→	Sol	→	Re
↓		↓		↓		
La		Mi		Si		

Los intervalos de la escala diatónica son más «puros», acústicamente más estables. Esto queda también a la vista en la mayor sencillez de las relaciones entre frecuencias que describen los intervalos que la componen. En primer lugar, y siempre a partir de un *do* normalizado de valor 1, se calcula *fa* y *sol* a una quinta pura del *do*: el *fa* se afina en 4/3, y el *sol*, en 3/2. A partir del *do* se calcula su tercera, *mi*, a una distancia de 5/4.

El mismo cálculo se realiza para encontrar el *la* como tercera de *fa*:

$$la = fa \cdot \frac{5}{4} = \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{3}.$$

Otra vez, para encontrar el *si* como tercera de *sol*:

$$si = sol \cdot \frac{5}{4} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{8}.$$

Y, por último, se calcula el *re* a una quinta pura de *sol*, cancelando una octava:

$$re = sol \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{8}.$$

Nota	Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
Relación de frecuencias	1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2

La secuencia con la que se fueron definiendo los intervalos de la escala diatónica sigue la estructura de la «música tonal». La inmensa mayoría de la música de los últimos siglos se inscribe en la música tonal, desde el periodo barroco y clásico hasta el rock y la música pop, pasando por los folclores occidentales.

En la música tonal, las notas se organizan jerárquicamente alrededor de una nota principal, llamada tónica, o centro tonal. Cada nota cumple una «función» musical en la organización, estableciendo las diferentes notas un juego de tensiones que impulsa el desarrollo del proceso musical. Esta funcionalidad hace que algunos intervalos (y en especial los bemoles y sostenidos, es decir, las teclas negras) convenga afinarlos de distinta manera según el contexto en el que se presentan. La tabla que sigue muestra una de esas posibles afinaciones.

Nota	Re♭	Mi♭	Sol♭	La♭	Si♭
Relación de frecuencias	16/15	6/5	45/32	8/5	16/9

Por algún lugar, siempre se complica...

La escala diatónica no escapa a los problemas que siempre plantea la incompatibilidad de los intervalos principales de octava, quinta y tercera. Casi todas sus quintas

son de 3/2, pero la quinta *re-la* es algo menor: 40/27. Y las dificultades crecen al intentar completar la escala con bemoles y sostenidos: siempre vuelve a presentarse la quinta del lobo.

Ha habido múltiples intentos de resolver el problema mediante diferentes «temperamentos», es decir, sistemas que intentan conciliar las distintas dificultades de la construcción de la escala, cediendo parcialmente la pureza de afinación de ciertos intervalos con el fin de que otros resulten un poco más aceptables. Por la mayor o menor pureza de cada intervalo, esa opción define el «color» de cada temperamento.

De todos modos, aunque estas escalas y temperamentos consigan un equilibrio relativamente aceptable para los distintos intervalos que los componen, es un equilibrio que siempre gira alrededor de la tónica, es decir, la nota a partir de la cual fueron calculadas todas las demás.

Esto no es un problema mientras se mantenga dicha tónica como centro. Pero en cuanto se quiere hacer que el centro tonal sea otro, toda la configuración de la escala cambia.

Aunque la afinación absoluta de cada una de las notas se mantiene, el cambio de centro tonal altera los equilibrios relativos en función del nuevo centro tonal, lo que genera un cambio de «color».

Al ejecutar una obra compuesta con su centro tonal en *do*, sobre un instrumento afinado a partir de *do* según la escala diatónica, la obra luce tal como fue concebida. Supongamos ahora que se quiere interpretar la misma obra, pero un tono más aguda, es decir con centro en *re*, sin cambiar de instrumento y manteniendo su afinación en *do*. El resultado es que la obra se oirá no sólo más aguda sino también «desafinada».

Para comprobarlo, basta fijar la atención en el intervalo *re-la*. En la escala diatónica dicho intervalo no se afina según la relación 3/2, sino 40/27. En la nueva interpretación, con centro tonal en *re*, el intervalo *re-la* estaría pasando a ocupar el lugar que antes ocupaba el intervalo *do-sol*, afinado según la relación 3/2.

Todos contentos

Hasta aquí no hemos conseguido construir una escala que no incluya intervalos «desafinados». Surge entonces una pregunta inevitable: ¿es posible construir un temperamento en el cual todas las relaciones entre las notas se mantengan, independientemente de cuál de ellas sea el centro tonal? Este problema es irresoluble

mediante la «compensación» de intervalos, cambiando la afinación de las notas para ampliarlos o reducirlos. La solución consiste en hacer que la octava quede construida con doce intervalos que desde el inicio sean iguales entre sí. Estos doce intervalos deben ser doce semitonos iguales que, en conjunto, completen una octava.

Vincenzo Galilei, padre de Galileo, propuso ya en el siglo XVI una división de la octava en doce semitonos iguales. Sus semitonos guardaban entre sí un ratio entre sus frecuencias de 18/17. El encadenamiento de doce de estos intervalos resulta en octavas y quintas «pequeñas», de 1,9855... y 1,4919..., respectivamente.

Enfoquemos la cuestión como si se tratara de un simple problema matemático. Llamemos x a la relación de frecuencias que deben guardar dos semitonos consecutivos, de modo que doce intervalos de x resulten igual a una octava. En términos algebraicos, diremos que ese x debe satisfacer la igualdad:

$$x^{12} = 2 \Rightarrow$$
$$x = \sqrt[12]{2}.$$

Este valor de 1,05946... permite, por definición, obtener una octava «perfecta». La coma pitagórica se distribuye por igual en todas las notas de la escala.

Como hemos visto, todas las escalas y temperamentos empleados en un momento histórico u otro repartían la coma pitagórica en función de qué intervalos se consideraran más importantes: a ellos se los mantenía más puros, mientras que los menos importantes quedaban desvirtuados. En el temperamento con intervalo 1,05946..., llamado «temperamento igual», todos los intervalos quedan equivalentemente «desafinados».

Para calcular la afinación de cada intervalo en este sistema se encadenan tantos semitonos como se requiera en cada uno de los casos. Tomemos, por ejemplo, un intervalo de quinta; éste se compone de siete semitonos, por lo que su afinación será la siguiente:

$$x^7 = (1{,}05946)^7 = 1{,}49830708.$$

De la aplicación de esta sencilla regla resulta una escala de doce notas, el valor de cuyos intervalos se detalla en la siguiente tabla:

Notas	Valor de los intervalos	
Do	$(1{,}05946)^{0}$	1
Do♯	$(1{,}05946)^{1}$	1,05946309
Re	$(1{,}05946)^{2}$	1,12246205
Re♯	$(1{,}05946)^{3}$	1,18920712
Mi	$(1{,}05946)^{4}$	1,25992105
Fa	$(1{,}05946)^{5}$	1,33483985
Fa♯	$(1{,}05946)^{6}$	1,41421356
Sol	$(1{,}05946)^{7}$	1,49830708
Sol♯	$(1{,}05946)^{8}$	1,58740105
La	$(1{,}05946)^{9}$	1,68179283
Si♭	$(1{,}05946)^{10}$	1,78179744
Si	$(1{,}05946)^{11}$	1,88774863
Do	$(1{,}05946)^{12}$	2

El temperamento igual se ha impuesto a lo largo y ancho del mundo, sobre todo para el caso de los instrumentos de afinación fija, y lo que es más, el oído humano parece tolerarlo bastante bien. Aunque es cierto que algunos intervalos resultan tal vez demasiado grandes (y, por el contrario, otros excesivamente pequeños), ofrece dos grandes ventajas: la primera, de índole práctica, es que permitió aprovechar los teclados ya existentes; la segunda, de naturaleza musical, es que gracias a que todos los intervalos son idénticos, el «color» del sistema se mantiene, independientemente de cuál sea el centro tonal (cabe matizar que hay quienes no ven en esto una ventaja, sino una pérdida de diversidad).

Es importante tener en cuenta que lo expuesto hasta ahora obliga en cualquier caso a los instrumentos de afinación fija. Tal es el caso del piano, cuyas notas mantienen su afinación a lo largo de toda una interpretación musical. Sin embargo, los instrumentos de afinación libre, tales como la voz humana, tienen la posibilidad de alternar una afinación diatónica y, según la necesidad, adaptarse al temperamento igual.

Cents

El cent es una unidad de medida logarítmica empleada para medir, con absoluta precisión, intervalos de frecuencias muy pequeños. Resulta de dividir cada semitono en 100 microintervalos (¡multiplicativos!) iguales. Un intervalo de 1 cent es demasiado pequeño como para que el oído humano sea capaz de percibirlo.

Como, a su vez, doce semitonos conforman una octava, el cent es un número c tal que

$$(c^{100})^{12} = 2 \Rightarrow$$

$$c^{1200} = 2 \Rightarrow$$

$$c = \sqrt[1200]{2}.$$

Los cent ofrecen una nueva manera de comparar la medida de los intervalos para los distintos temperamentos. Al tratarse de una medida logarítmica, se encadenan mediante suma (y no mediante la multiplicación, como en casos anteriores). Por tanto, el trabajo con cents facilita mucho los cálculos. Dado un intervalo p (expresado en su medida proporcional), su medida en cents será:

$$c(p) = 1.200 \cdot \log_2 p.$$

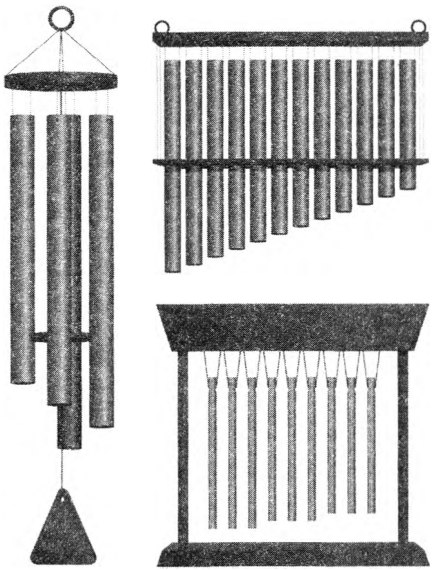
Gracias a esta fórmula de conversión es posible recalcular todos los intervalos y expresarlos en cents, lo que facilita la comparación entre los distintos temperamentos:

		Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
Escala pitagórica	Relación proporcional	1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2
	Cents	—	203,91	407,82	498,04	701,95	905,86	1109,77	1200
Escala natural	Relación proporcional	1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2
	Cents	—	203,91	386,31	498,04	701,95	884,35	1088,26	1200
Temperamento igual	Relación proporcional	1	1,1224	1,26	1,334	1,498	1,681	1,887	2
	Cents	—	200	400	500	700	900	1100	1200

CAMPANAS ARMÓNICAS

Los carillones de viento están formados por pequeños tubos, generalmente metálicos, de diferente longitud y que están sujetos a una pieza circular. Un aro suspendido en el centro golpea los tubos al ser movidos por el viento. Habitualmente la afinación de los tubos responde a una escala pentatónica, pero podrían fabricarse con colecciones de diferentes sonidos. Debe respetarse tanto la longitud proporcional de los tubos como el punto en el que se le practica el agujero a cada uno de ellos antes de ser colgado. Se parte de un tubo L, que será el sonido fundamental de la escala. A partir de ahí, se calcula la longitud de los otros tubos, L_i, con la fórmula:

$$L_i = \frac{L}{(R_i)^{\frac{1}{2}}}.$$



Carillones de distinta morfología fabricados con tubos metálicos.

En comparación con las quintas puras, las quintas del temperamento igual resultan un tanto pequeñas. Las terceras del temperamento igual, por su parte, se ubican a mitad de camino entre las otras dos: son más grandes que las terceras puras, pero más pequeñas que las pitagóricas.

Conmensurabilidad

Aunque el mundo pitagórico no estaba familiarizado con las fracciones tal y como hoy las conocemos, manejaba el concepto equivalente de las relaciones entre números enteros. Como se ha visto, esta especial aritmética les permitió explicar sus descubrimientos sobre la armonía de los sonidos de dos cuerdas comparando sus longitudes relativas: 2:1, 3:2, 4:3...

Una de las creencias más firmes de los pitagóricos, y uno de los pilares de su noción de que el número expresaba la armonía del universo, era que dos medidas

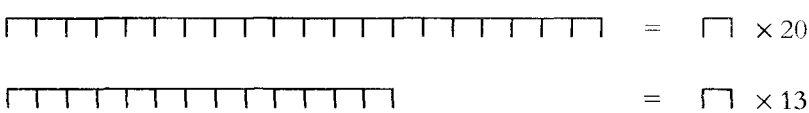
Las relaciones de frecuencia R_i vinculan a cada sonido con la fundamental. A su vez, el nodo debe colocarse a una altura equivalente al 22,4% de la longitud de la varilla. En el cuadro siguiente se muestran algunos de los valores de longitud de los tubos para un carillón de siete tubos:

Intervalo	R_i	L_i	Nodo
Fundamental	1	30	6,72
2ª	1,125	28,28	6,34
3ª	1,25	26,83	6,01
4ª	1,34	25,98	5,82
5ª	1,5	24,49	5,48
6ª	1,67	23,24	5,20
7ª	1,875	21,91	4,91
8ª	2	21,21	4,75

Si se desea, también se pueden calcular longitudes más graves, por ejemplo, una cuarta descendente. La fracción en este caso de R_i es la inversa de la de la cuarta ascendente:

4ª desc.	0,75	34,64	7,76

cualesquiera siempre eran conmensurables, es decir, podían ser comparadas apelando a dos números enteros. El concepto de conmensurabilidad está directamente relacionado con lo que hoy llamamos números racionales. Un número racional es lo que comúnmente se conoce como fracción: la división o relación o razón entre dos números enteros (siendo el segundo no nulo). Usando términos actuales, una definición de la conmensurabilidad pitagórica diría que dos medidas cualesquiera A y B son conmensurables si existe una tercera medida C y dos números enteros p y q tales que C cabe p veces en A y q veces en B.



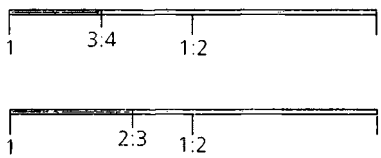
O, dicho de otro modo, que puede establecerse con precisión, y usando tan sólo dos números enteros, cuántas veces mayor (o menor) son dos medidas A y B una

con respecto a la otra apelando tan sólo a dos números enteros. Sin embargo, ya en su época los pitagóricos descubrieron, para su general consternación, que había números inconmensurables, es decir, no expresables como relación de números enteros, que en la actualidad reciben el poco generoso apelativo de «irracionales».

LAS TRES MEDIAS

Pitágoras estaba influenciado por sus conocimientos sobre las medias (aritmética, geométrica y armónica) y el misticismo de los números naturales, especialmente los cuatro primeros, denominados «tetrakis».

Como puede observarse en la figura siguiente,



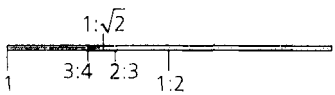
3:4 es la media aritmética de 1 y 1/2:

$$1-\frac{3}{4}=\frac{3}{4}-\frac{1}{2},$$

mientras que 2:3 es la media armónica de 1 y 1/2:

$$\frac{1-\frac{2}{3}}{1}=\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}.$$

Pitágoras comprobó experimentalmente que cuerdas con longitudes de razones 1:2, 2:3 (media armónica de 1 y 1/2) y 3:4 (media aritmética de 1 y 1/2) producían combinaciones de sonidos agradables y construyó, como hemos visto, una escala a partir de esas proporciones. A estos intervalos los llamó «diapasón», «diapente» y «diatesarón». Hoy los llamamos octava, quinta y cuarta. Pero, ¿qué le pasó a la media geométrica? ¿Fue rechazada por su inconmensurabilidad? ¡Correspondía exactamente al *fa sostenido* de la escala cromática!





Los dos números irracionales más famosos son π y $\sqrt{2}$. Este último surge precisamente al calcular, mediante el teorema de Pitágoras, la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos de valor 1, lo que tal vez es la instancia más célebre en matemáticas del refrán «probar la propia medicina».

Como hemos visto, la propuesta de Vincenzo Galilei de afinar los intervalos mediante una relación de números enteros de 18/17 no permitía obtener octavas puras. Su elección de la relación 18/17 es una buena aproximación, pero cabe preguntarse si no habrá algún número racional que sea equivalente a $\sqrt[12]{2}$, la medida del semitono del temperamento igual. Es decir, si existen dos enteros positivos a y b tales que

$$\frac{a}{b} = \sqrt[12]{2}.$$

La respuesta es que ese número racional no existe. En consecuencia, es imposible afinar el semitono con una relación de números enteros a/b de manera que doce semitonos encadenados conformen una octava «verdadera». Si existiesen, resultaría que

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{12} = 2 \Rightarrow$$
$$\left(\frac{a^6}{b^6}\right)^2 = 2$$

y, por consiguiente, habríamos encontrado dos enteros $a' = a^6$ y $b' = b^6$ tales que $(a'/b')^2 = 2$, y entonces $\sqrt{2}$ sería un número racional, cosa que sabemos que es falsa.

¿Qué dirían los pitagóricos si vieran que, al final de esta historia, terminaron siendo los números irracionales los que vinieron a resolver el problema de la afinación?

Capítulo 2

La otra dimensión: el tiempo

Considero que el ritmo es parte primordial y quizás esencial de la música: creo que posiblemente existe desde antes que la melodía y la armonía, y de hecho tengo una secreta preferencia por este elemento.
Olivier Messiaen (1908-1992)

El universo es cambio permanente. El paso del tiempo se manifiesta en el cambio: cambios de posición, de forma; cambios químicos, físicos... Los procesos biológicos, meteorológicos, geológicos, astronómicos, transitan el devenir temporal. En ese universo en movimiento, el hacer de hombres y mujeres no escapa al tiempo. El ritmo es el modo en que dichos acontecimientos se suceden en el tiempo: tanto en los procesos naturales como en aquellos que son producto de la acción humana.

Al ritmo de los astros en sus órbitas bailan las fases de la Luna y las mareas, y las estaciones, los días y las noches. Afortunadamente, la humanidad ha sido capaz de sorprender al tiempo con nuevos pasos, alejados del estricto pulso del reloj. En resumen, llamamos ritmo a la sucesión y reiteración de acontecimientos. En particular, el ritmo musical es la frecuencia en que se producen las articulaciones de la emisión de sonidos.

Desde la Antigüedad, la humanidad ha hecho intentos por resguardar los giros melódicos de manera gráfica. Los neumas, primitivos grafismos musicales, brindan una idea sobre el fraseo y la intensión del canto, pero no transmiten alturas ni ritmos exactos. Era necesario conocer la melodía, transmitida oralmente o por imitación, para poder aplicar en ella el sentido musical que ofrecen los neumas.

Agrupamientos rítmicos. Ritmo, pulso, acentos

Al oír música surge en el oyente la necesidad de acompañar ciertas articulaciones sonoras con movimientos de un pie, de una mano o de la cabeza. Esta primera agrupación rítmica percibida es lo que suele denominarse «pulso». Es posible inten-

sificar y afinar aún más la atención hasta apreciar el contenido rítmico de cada uno de esos pulsos: un ritmo interno, al que denominamos «subdivisión del pulso». Este ritmo interno puede ser de dos tipos: «binario», cuando se siente el pulso subdividido en dos, o «ternario», cuando se siente el pulso subdividido en tres. Si surge una sensación de subdivisión en cuatro también se considera binaria. Agrupamientos más grandes suelen entenderse como integrados por los más pequeños, como, por ejemplo, $5=3+2$ o $5=2+3$. Podría decirse que el pulso es el latido de la pieza musical.

De Grecia a las primeras figuras proporcionales

El primer ejemplo histórico de notación musical del que se tiene constancia procede de las culturas del Creciente Fértil, en concreto de una tablilla datada hacia 2000 a.C. y hallada en la localidad sumeria de Nippur, en el actual Iraq, que describe una pieza musical en escala diatónica y compuesta en armonías de tercera. Más tarde, los griegos desarrollaron un sistema de notación propio mediante el cual eran capaces de representar la altura y la duración de una nota, pero no las armonías. El conocido como epitafio de Seikilos, fechado entre los siglos II a.C. y I d.C., contiene el registro musical completo de un himno: sobre la letra de este último se suceden una serie de letras y símbolos cuyo detenido estudio ha permitido a los investigadores modernos disponer de una idea aproximada de la naturaleza de la composición.

Los diversos sistemas de notación de origen griego quedaron relegados al olvido tras la caída de Roma, y no fue hasta mediados del siglo IX cuando, al abrigo del canto gregoriano, surgió en Europa un nuevo sistema, el «neumático», derivado de la marcación silábica de la poesía latina. Los neumas eran primitivos grafismos musicales que indicaban, por la forma de cada uno de ellos, la nota aproximada correspondiente al tramo de letra del himno, y brindaban de este modo una idea más o menos completa del fraseo y de la intensión del canto, pero, por el contrario, no transmitían alturas ni ritmos exactos. Así, era necesario conocer la melodía, que debía transmitirse acústicamente, para poder aplicar sobre ella la información musical expresada en notación neumática. Para corregir estas limitaciones, los neumas se dotaron de una compleja serie de anotaciones complementarias y se dispusieron a distintas alturas relativas, indicadas por medio de cuatro líneas paralelas, germen del actual pentagrama.

Hacia mediados del siglo XIII se dio en Europa un fuerte proceso de secularización de las artes, en consonancia con el desprestigio vivido por la Iglesia. Hasta

CANTO A LA BREVEDAD DE LA VIDA

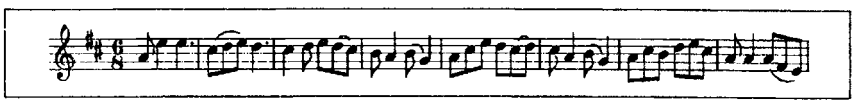
El epitafio de Seikilos está grabado sobre una tumba griega hallada en la localidad de Aydin, en la actual Turquía. El texto completo del epitafio reza: «Soy una lápida, una imagen. Seikilos me dejó aquí plasmado como un signo eterno de su memoria». A este texto le sigue una pieza musical, compuesta por la letra de un himno sobre la cual se disponen una serie de letras y signos. Transcrito a escritura griega moderna, la pieza tiene el aspecto siguiente:

C Z Ζ ΚΙΖΙ Κ Ι Ż ΙΚ Ο C Ο Φ
Ὅ σον ζῇς, φαί νου, μη δὲν ὅλ ως σὺ λυ ποῦ·
C Κ Ζ Ι ΚΙΚ C Ο Φ C Κ Ο Ι Ζ Κ C C C Χ J
πρὸς ὀλ ί γον ἐ στὶ τὸ ζῆν, τὸ τέ λος ὁ χρόνος ἀπαι τεῖ.

El texto del himno puede traducirse como sigue:

«Brilla mientras vivas,
no sufras por nada;
la vida dura muy poco,
y el tiempo reclama su parte».

En cuanto a la parte musical, en notación moderna tendría este aspecto:
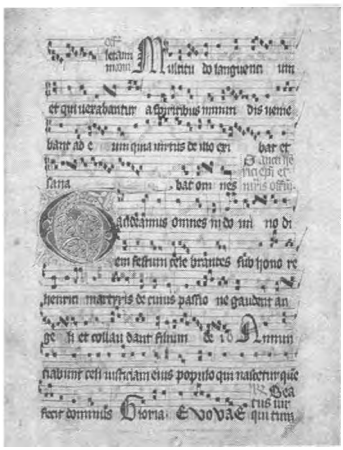


entonces, la escritura musical se desarrollaba casi exclusivamente en círculos religiosos; fuera de ese ámbito, la música popular vivía un rico desarrollo polifónico que requería una escritura diferente.

Hacia finales del siglo XIII y principios del XIV, se alumbró una nueva forma de escritura musical, más eficiente, que fue documentada por el francés Philippe de Vitry (1291-1361) en su tratado *Ars Nova*. Su obra, tanto teórica como musical, se caracteriza por la profundización de la escritura rítmica, dada la necesidad de plasmar gráficamente la nueva polifonía, en la que distintas voces deben articularse con gran precisión.

SÍLABAS Y MELISMAS

A principios del siglo XIII la música se anotaba en Europa mediante neumas dispuestos sobre una trama de cuatro líneas paralelas, regida por una clave que indicaba la altura.



Una buena muestra de la complejidad alcanzada por la notación neumática libro de himnos finlandés del Graduale Aboense, *de los siglos XIII-XIV.*

Los himnos en los que a cada sílaba le correspondía una sola nota se denominaban silábicos, por oposición a los melismáticos, en los que una misma sílaba podía cantarse con varias notas en sucesión. Cuando la sucesión de notas era ascendente, los neumas que las indicaban adoptaban el aspecto de apretados cuadrados y se leían de abajo arriba; en caso contrario, semejaban diamantes y debían leerse de izquierda a derecha. Por ejemplo, y para el caso de un neuma que indique una sílaba que se canta con tres notas, existen cuatro variaciones, a saber:

Perfectum/imperfectum

El *Ars Nova* fue revolucionario en muchos sentidos, y vino a concretar lo que ya se venía esbozando en estudios de varios músicos de la época. Hasta ese momento, el predominio de la música religiosa había dado preferencia a las subdivisiones ternarias al asociar el tres con la Santísima Trinidad y, por ende, con la perfección.

La obra de Philippe de Vitry sentó las bases de una escritura capaz de dar respuesta a las necesidades rítmicas de una expresión musical cada vez más sofisticada, en la que convivían lo ternario y lo binario, y ajustó con claridad las proporciones entre figuras. La solución ideada por el músico y poeta francés es sumamente inge-

	*Scandicus*	Tres notas ascendentes.
	*Climacus*	Tres notas descendentes.
	*Torculus*	Una nota, seguida de otra ascendente y una tercera descendente.
	*Porrectus*	Nota ascendente, nota descendente, nota ascedente.

La notación neumática tardía trabajaba con símbolos que no pueden dejar de resultarnos familiares, y ponen claramente en evidencia el origen histórico de la notación moderna:

	*Flat*	Esta marca tiene el mismo significado que el bemol actual, y sólo se indicaba en la línea del *si*.
	*Mora*	Al igual que en la notación moderna, el punto detrás de una nota indica que ésta debe alargarse en el tiempo.

niosa, en tanto que da cabida a lo binario y lo ternario utilizando los mismos grafismos o figuras. Su método está basado en tres sistemas proporcionales y crea una nueva figura: la «mínima», que se suma a la colección ya existente en la época y que incluía «longa», «breve» y «semibreve». Los tres tipos de proporción entre figuras son los siguientes:

- Modo *(modus)*: relación entre longa y breve.
- Tiempo *(tempus)*: relación entre breve y semibreve.
- Prolación *(prolatio)*: relación entre semibreve y mínima.

Las dos primeras proporciones, el modo y el tiempo, podían ser a su vez:

– Ternarias o «perfectas».
– Binarias o «imperfectas».

En el caso del tercer tipo de proporción, la prolación, se la denominaba:

– Menor, si era binaria.
– Mayor, si era ternaria.

En la siguiente tabla se especifican las proporciones entre las distintas figuras y las equivalencias en términos de duración de estas últimas en relación a unas proporciones u otras:

Proporción	Figuras	Relación entre figuras
Modus perfectum	Longa/breve	1 longa = 3 breves
Modus imperfectum	Longa/breve	1 longa = 2 breves
Tempus perfectum	Breve/semibreve	1 breve = 3 semibreves
Tempus imperfectum	Breve/semibreve	1 breve = 2 semibreves
Prolatio *major*	Semibreve/mínima	1 semibreve = 3 mínimas
Prolatio minor	Semibreve/mínima	1 semibreve = 2 mínimas

Cabe señalar que la condición de binario y ternario no es exclusiva del pulso, sino que se repite en agrupaciones rítmicas mayores. Por ejemplo, un compás puede tener dos o tres pulsos, y también lo llamaremos, en consecuencia, binario o ternario. Los compases no son otra cosa que una convención creada para facilitar la comprensión y la notación del ritmo. Parten de un principio básico: la división del tiempo de una composición musical en partes iguales.

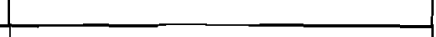
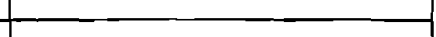
Los compases se forman acentuando el primer pulso de una serie de dos o más, de modo que se agrupen en un patrón. Por ejemplo, y para el caso de un

pulso binario, UNO dos, UNO dos; o bien, en el caso de un pulso ternario, UNO dos tres, UNO dos tres. Los compases se indican, hoy día, por medio de una fracción *x/y* donde *x* indica el número de figuras que caben en el compás, e *y*, el tipo de figuras de las que se trata (1 indica una redonda; 2, una blanca; 4, una negra, etc.). Más adelante profundizaremos en éste y en otros aspectos del compás y su notación.

Regresemos a Philippe de Vitry. Con la combinación de tempus y de prolatio, sumado a que se dispone de tipos de pulsos, el *Ars Nova* obtuvo estructuras rítmicas bien diferenciadas y definidas, que se simbolizaban del siguiente modo:

- Un círculo con un punto en el centro representaba un compás ternario con división ternaria del pulso, equivalente al actual compás de 9/8.
- Un círculo sin punto representaba un compás ternario con subdivisión binaria del pulso, equivalente al actual 3/4.
- Una letra C mayúscula con un punto en su interior representaba un compás binario con subdivisión ternaria del pulso, equivalente al actual 6/8.
- Una letra C mayúscula sin punto representaba un compás binario con subdivisión binaria, equivalente al actual 2/4.

En la tabla siguiente se resumen estos cuatro ritmos, así como la simbología de la época y las equivalencias entre distintas figuras. Observemos cómo en el tempus perfectum, prolatio major, una figura breve (el punto) equivale a tres semibreves (rombos), cada una de las cuales equivale, a su vez, a tres mínimas (un rombo con un palito vertical):

Tempus perfectum	Prolatio major	9/8	
Tempus perfectum	Prolatio minor	3/4	
Tempus imperfectum	Prolatio major	6/8	
Tempus imperfectum	Prolatio minor	2/4	

FENÓMENO Y REPRESENTACIÓN

Del mismo modo que la matemática genera modelos que intentan conceptualizar la realidad, es importante concebir la escritura musical como una representación gráfica de un fenómeno, y no al revés. Cuando un músico enfrenta el material escrito de una obra que jamás ha oído, obtendrá de esa partitura solamente una «aproximación» de la idea musical del compositor. Basta con oír diferentes versiones de una misma obra interpretada por músicos distintos para apreciar la diversidad de miradas. Algo similar ocurre con un texto escrito, al ser leído o declamado: un poema, por ejemplo, en la voz de un actor, tiene una carga y un sentido expresivo inexplicables, y esa magia no le ha sido transmitida con ningún signo en el papel. Un mapa de un país es sólo una representación gráfica bidimensional del territorio. No es el país, pero puede ser ayuda y una guía en el viaje. La partitura es capaz de comunicar un aspecto técnico de la música, pero su interpretación queda en manos del músico, cuyas decisiones estéticas son las que completarán el mensaje y lo dotarán de sentido.

Percusión: el ritmo puro

El ritmo se viste con la melodía, con sus ligados, cambios de altura y de intensidades. En la percusión, en cambio, el ritmo queda al desnudo. Hay golpes de intensidad, altura y timbre variados que los embellecen. Pero más allá de esos matices, el golpe está presente o no lo está, no hay más alternativas. Es así como el ritmo se muestra más nítidamente, y puede apreciarse su esencia: el panorama ideal para una mirada matemática.

En la percusión, las secuencias cíclicas se caracterizan por la distribución de las articulaciones. Nos proponemos anotar exclusivamente dichas articulaciones, despojadas de las prolongaciones de los golpes por efecto de la resonancia. De este modo se podrá percibir la articulación precisa y comprender la secuencia.

Podemos distinguir tres niveles de sensación rítmica, según el grado de intensidad:

- El primer nivel, la articulación más rápida, corresponde a las subdivisiones del pulso. Las numeramos a partir del primer pulso como 1, 2, 3, etc., hasta llegar a un nuevo pulso, para recomenzar el conteo.
- El segundo nivel lo forman los pulsos; son todos los números 1 de la secuencia.
- En el tercer nivel aparecerán algunos pulsos que se oyen con mayor intensidad: los acentos.

Un secuencia rítmica de 9/8 expresada en los tres niveles descritos sería ésta:

1°	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	...
2°	1			1			1			1			1			1			...
3°	1									1									...

Tomaremos como referencia la segunda línea, que sólo muestra los pulsos. Completando los lugares vacíos con ceros, obtenemos una representación clara de la secuencia de pulsos. Cada 1 representa un golpe; cada 0, un silencio: la rítmica pura.

1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	...

Los pulsos son la estructura sobre la que se monta la música; como los hilos de la urdimbre en los que se forma el tejido. Hemos hablado de golpes y silencios. Fijaremos como unidad de medida de esos golpes la «corchea», a la que simbolizaremos como 𝅘𝅥𝅯. Del mismo modo que sólo hay golpes y silencios, sólo hay corcheas y silencios de corcheas. A estos segundos los simbolizaremos como 𝄾. A la unidad más simple formada por un golpe y un silencio (o también por una corchea y un silencio de corchea) la llamaremos «negra», y la simbolizaremos con 𝅘𝅥. Por último, introduciremos un nuevo símbolo en nuestra notación, la llamada negra con «puntillo», 𝅘𝅥., para indicar aquellos casos en que a un primer silencio le sigue otro, es decir, para el caso de la secuencia 𝅘𝅥𝅯𝄽.

En definitiva, estamos considerando un sistema binario donde asignamos los valores 1 y 0 a las corcheas y a los silencios de corchea, respectivamente. Las equivalencias de los símbolos en nuestra notación, en un compás de 4/4, se anotan como:

𝅘𝅥	𝅘𝅥	𝅘𝅥	𝅘𝅥	=	𝅘𝅥𝅯	𝄾	𝅘𝅥𝅯	𝄾	𝅘𝅥𝅯	𝄾	𝅘𝅥𝅯	𝄾	=	1	0	1	0	1	0	1	0

Observemos cómo la secuencia de golpe-silencio-golpe-silencio se repite dos veces. Un compás de dos pulsos, cada uno de los cuales dura una negra con puntillo (6/8), lo anotamos como:

𝅘𝅥.	𝅘𝅥.	=	𝅘𝅥𝅯	𝄾	𝄾	𝅘𝅥𝅯	𝄾	𝄾	=	1	0	0	1	0	0

Cubriendo el «espacio» sonoro

En el capítulo siguiente se analizarán con más detalle las estructuras de los cánones. Por ahora nos ocuparemos simplemente del aspecto rítmico de esta forma musical, denominada «canon rítmico». La ejecución simultánea de varias células rítmicas representa un importante desafío interpretativo, tanto en lo individual como en lo colectivo. Un modo de introducirse en esta práctica es el ejercicio del canon rítmico.

Partimos del ritmo ♩.♩.♩ = 3 + 3 + 2 = 10010010, que lo ejecutan cíclicamente dos músicos. El segundo inicia su secuencia después de la primera articulación del primer intérprete:

1	0	**0**	1	0	**0**	1	0	1	0	**0**	1	0	**0**	1	0	1	0	...
	1	**0**	0	1	**0**	0	1	0	1	**0**	0	1	**0**	0	1	0	1	...

En la secuencia anterior puede observarse que en los momentos 3, 6, 11, etc. (marcados en negrita) no hay articulación de ninguno de los dos ritmos. Hay algunos patrones rítmicos que aceptan ser interpretados en canon, de modo que:

a) dos músicos no inicien su articulación en el mismo momento;
b) no quede ningún momento sin ninguna articulación.

Es posible comparar esta situación con el problema matemático general de la *teselación del plano*, es decir, el que se ocupa de cubrir la totalidad de un plano con formas geométricas regulares. En nuestro caso, sin embargo, lo que se desea cubrir totalmente es el plano sonoro.

Naturalmente que una estructura simple como ♩.♩. = 100100, cumple con la consigna. El desafío es cada vez mayor cuanto más larga es la secuencia rítmica que se toma como base. La secuencia de doce golpes siguiente:

1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1

cubre completamente el plano sonoro sin ningún instante de silencio, al realizarse un canon a tres voces con entradas sucesivas cada tres articulaciones. Veamos el desarrollo de las tres voces:

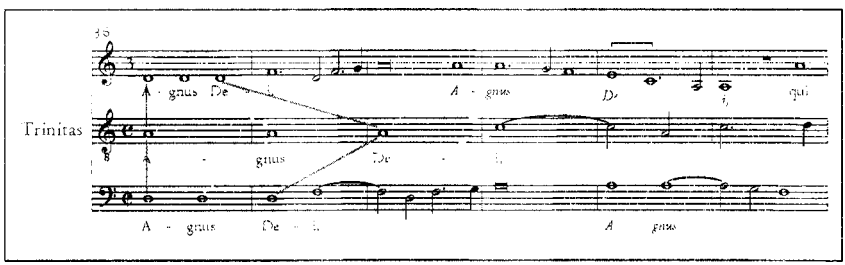
1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	...
				1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	...
							1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	...

PROPOSTA Y RISPOSTA

En un principio, la palabra «canon» se empleaba para designar las reglas de comportamiento de los cantantes en la interpretación de una pieza vocal. A partir del siglo XVI, dicho vocablo pasó a designar un tipo de composición concreto, en el que un líder (también llamado *dux* o *proposta*) interpretaba una misma melodía que con posterioridad era repetida por un seguidor o seguidores (el *comes* o *risposta*). La melodía del seguidor podía ser rítmicamente equivalente a la del líder o, por el contrario, consistir en transformaciones de ésta de mayor o menor complejidad. La tonada infantil *Frère Jacques* es un ejemplo muy conocido de un canon en el que los seguidores repiten la misma melodía principal sin variación musical alguna.

Entre las transformaciones que pueden adoptar las sucesivas voces de un canon se cuentan: el número mismo de voces; el intervalo de «espera» entre la primera y las sucesivas voces, o incluso entre las distintas voces en el caso de no ser siempre la misma; el tempo de la melodía interpretada por las voces sucesivas; si la melodía de los seguidores es una inversión de la principal, una retrogresión de la misma o bien una combinación de ambas, etcétera.

El canon fue un tipo de composición muy habitual en el ámbito de la música religiosa, y alcanzó su máxima expresión en la obra de compositores tardomedievales, como Guillaume de Machaut, o renacentistas, tales como Josquin des Près. Sin embargo, el máximo exponente de la técnica del canon y, en general, de muchas de las formas musicales estructuralmente más complejas, de las que ofreció ejemplos justamente considerados «canónicos», fue el gran Johann Sebastian Bach.



Primeros compases de la misa L'Homme armé super voces musicales, *de Josquin des Près, cuyo primer movimiento consiste en un canon a tres voces. La voz central es la más lenta; la tercera canta al doble de velocidad que la segunda, y la primera, al triple. Las líneas unen las cuatro primeras notas de la composición en cada una de las tres voces.*

Desde un punto de vista matemático resulta interesante considerar si existe algún método que permita diseñar este tipo de secuencias. Hay que tener en cuenta los elementos siguientes:

- Cantidad total de articulaciones (a).
- Cantidad de voces (v).
- Desplazamiento de las entradas de las voces (d).

Para que el canon tenga solución deben darse las siguientes condiciones:

- La cantidad de articulaciones (a) debe ser divisible por v.
- Hay que cubrir a articulaciones con v voces. Como las voces son todas iguales, la estructura debe tener un total de a/v «unos».
- Las entradas sucesivas se desplazan en un valor igual a a/v, asegurándonos que no habrá posiciones duplicadas con unos.

Avancemos con un ejemplo con cuatro articulaciones ($a=4$) y dos voces ($v=2$). La estructura deberá tener una entrada cada $a/v=4/2=2$ articulaciones. En este caso, es posible hallar todas las alternativas y no es complicado evaluar cuáles son las entradas correctas de manera manual. Así, las posibles estructuras son:

1100
1001

Por tratarse de una secuencia que se repite cíclicamente, es fácil observar que ambas disposiciones son equivalentes. Para el primer caso, la estructura, que sólo admite un desplazamiento de dos articulaciones, es:

1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
		1	1	0	0	1	1	0	0	1	1

Y para el segundo:

1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1
		1	0	0	1	1	0	0	1	1	0

Se observa que una vez que el canon está corriendo, la ejecución es la misma en ambos casos. Pongamos ahora como ejemplo una estructura de 12 articulaciones, distribuidas en grupos de igual duración. Si se pretende cubrir esas 12 articulaciones con la cantidad de 3 voces que se quieran agregar,

$$a = 12$$

$$v = 3$$

$$\frac{a}{v} = \frac{12}{3} = 4,$$

hay que armar 3 grupos de 4.

Partiendo de la estructura siguiente,

0000 0000 0000,

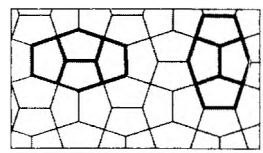
cada una de las cuatro posiciones de los grupos se ocupa con un 1, de modo que «todas» queden ocupadas con *unos*, «sólo una vez»:

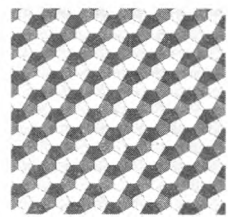
1000 0100 0011.

Para evitar duplicar golpes (*unos* encolumnados) es necesario realizar un desplazamiento igual a a/v; en este caso es 4.

EMBALDOSANDO EL UNIVERSO

Una teselación es una regularidad o patrón de figuras que cubren el plano. El caso más simple y cotidiano son las baldosas y los azulejos. La teselación debe cumplir dos requisitos: que no queden huecos sin cubrir y que las figuras no se solapen. El cuadrado y el hexágono regular son dos ejemplos de figuras geométricas sencillas que cubren el plano. Pero la teselación admite también el diseño de figuras irregulares, como la que adorna buena parte del embaldosado de las calles de El Cairo y que aparece representado en las ilustraciones, abajo con un efecto tridimensional.





El compás. Métricas. Subdivisiones

El acento y el compás

Un discurso musical alterna pulsos fuertes con otros débiles. En la escritura musical, los pulsos fuertes regulares estructuran el discurso: con cada pulso fuerte, se inicia un compás, que durará hasta el siguiente pulso fuerte. El compás es, pues, cada fragmento rítmico entre dos pulsos fuertes. Si los compases de un pasaje musical tienen la misma duración y características, se dice que la obra es regular; matemáticamente, diríamos que es constante. Gracias a esta regularidad, basta con definir dichas características constantes al comienzo de la obra.

Tipos de compás

Si los pulsos del compás tienen subdivisión binaria, el compás se denomina simple; si la subdivisión es ternaria, compuesto. El contenido del compás se indica mediante una fracción, que cambia en su concepto, según sea simple o compuesto. En el numerador, el número indica la cantidad de pulsos, y en el denominador, corresponde a una figura que mide, por convención, las unidades de pulso; por ejemplo, una redonda equivale a una unidad de pulso; una blanca, a dos; una negra, a cuatro. En el compás simple, el denominador indica la figura que mide el pulso, mientras que en el compuesto, el denominador es la figura que corresponde a la subdivisión del pulso. Las unidades de pulso más utilizadas son la negra (un golpe y un silencio por pulso) y la negra con puntillo (un golpe y dos silencios por pulso).

Veamos algunos ejemplos clarificadores. Un compás simple, de dos pulsos de negra por compás, 2/𝅘𝅥, se indica con la fracción 2/4.

El 2 corresponde a la cantidad de pulsos, y el 4 indica que dicho pulso es de negra. Un compás compuesto, de dos pulsos por compás, tendrá dos pulsos de negra con puntillo: 2/𝅘𝅥.

Pero surge un problema al querer transformarlo en fracción: no existe un número que corresponda a la negra con puntillo (ni a ninguna otra figura con puntillo), por lo que no hay modo de expresar la duración del pulso en el denominador. Esto se resuelve indicando, en lugar del número de la figura del pulso, el correspondiente a la figura de la subdivisión de pulsos. En nuestro ejemplo, la subdivisión la representan las corcheas; al haber dos negras con puntillo por compás, habrá un total de seis corcheas. En consecuencia, la fracción será 6/8.

La notación del ritmo puro nos permite ver claramente la alternancia binaria de golpes y silencios, *unos* y *ceros*:

2/4

<				<				<			
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

3/4

<						<					
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

4/4

<							<							<							
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

En tanto que lo ternario alterna un 1 cada dos 0:

6/8

<						<					
1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0

9/8

<								<						<								
1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0

Los compases más frecuentes, según sus cantidades de pulsos, son:

	2 pulsos	3 pulsos	4 pulsos
Compás simple	2/4	3/4	4/4
Compás compuesto	6/8	9/8	12/8

TODOS LOS COMPASES DEL MUNDO

Como hemos visto, el compás es una estructura que tiene una medida de duración determinada y en el que se alternan sonidos y silencios. Fuera de todo sentido artístico, es interesante analizar todos los modos en que un compás puede ser completado con ciertos grupos rítmicos diferentes. Lo que sigue es un interesante juego combinatorio que un estudiante de música puede realizar, para ejercitar exhaustivamente la combinación de una selección cualquiera de grupos rítmicos y de silencios. Partimos de un compás de 4/4 y colocamos en él cuatro grupos rítmicos equivalentes a una negra, que identificamos como A, B, C y D. El procedimiento es como sigue.

Ordenamos un primer compás:

4/4 | A B C D |

A partir de esa combinación de los cuatro elementos se lleva a cabo lo que se denomina «permutación de valores», que totaliza cuatro ciclos de permutaciones:
Paso 1: Se elige el último elemento del compás (en este caso, el grupo D), que será el objeto generador de la primera serie de permutaciones. El procedimiento es como sigue: se constituye el siguiente compás, ubicando a D entre B y C:

4/4 | A B ***D*** C |.

Irregularidades

Los ejemplos que se acaban de exponer reflejan ritmos con compases y pulsos regulares, es decir, todos los compases tienen la misma duración, al igual que los pulsos. Pero esto no siempre es así: por ejemplo, dentro de la música de raíz africana y la americana derivada de ella es frecuente hallar patrones rítmicos irregulares. Estas irregularidades se han presentado también en el mundo de la música académica.

Existe un patrón rítmico muy extendido por distintas músicas de América y de África, de una gran riqueza; en nuestros términos diríamos que está compuesto por compases regulares de tres pulsos irregulares. Esto significa que todos los compases duran lo mismo, pero su contenido se presenta en pulsos de distinta duración. El compás está formado básicamente por dos pulsos ternarios y un pulso binario; en el caso de nuestra nomenclatura, dos pulsos de negra con puntillo, y uno de una negra, tal como se muestra:

Paso 2: En el paso siguiente, el mismo elemento D se coloca en la segunda posición, desplazando ahora al elemento B hacia la derecha. Se escribe este nuevo compás:

4/4 | A ***D*** B C |.

Paso 3: Por último, el elemento D se dispone en la primera posición, completando un primer ciclo de permutación:

4/4 | ***D*** A B C |.

El compás obtenido pasa a ser la nueva combinación a permutar. El procedimiento es el mismo: el elemento ubicado en la cuarta posición (que ahora es C), es tomado como objeto a desplazar, y se repiten los pasos de 1 a 3:

4/4 | D A B C | D A ***C*** B | D ***C*** A B | ***C*** D A B |.

Tras repetir el procedimiento con B y finalmente con A, se regresa al ordenamiento inicial:

4/4 | C D A B | C D ***B*** A | C ***B*** D A | ***B*** C D A |
4/4 | B C D A | B C ***A*** D | B ***A*** C D | ***A*** B C D |.

Este sistema de permutación de valores agota las combinaciones de secuencias para los grupos rítmicos elegidos.



<								<								<							
1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0

Expresado con sus subdivisiones, el compás está formado por ocho corcheas, es decir, un contenido total igual al de un compás de 4/4. Sin embargo, indica una realidad rítmica absolutamente diferente, pues el compás de 4/4 tiene cuatro pulsos binarios. En cambio, este nuevo compás presenta una mezcla de pulsos binarios y ternarios.

Este tipo de irregularidades suele expresarse con una indicación de compás que muestra la cantidad de subdivisiones de cada pulso separadas con un signo +; en el caso del ejemplo, 3 + 3 + 2.

Ritmos en estratos

En diferentes culturas del mundo se muestra una particular práctica de la percusión denominada «polirritmia», en la que varios motivos con articulaciones diversas se suman en un producto sonoro total, complejo y organizado. Los resultados musicales son sumamente bellos, pues la variedad es enorme tanto en la parte rítmica como en la instrumental. Un arte vivo, observado y analizado por la matemática.

Si bien cada uno de los estratos rítmicos es esencialmente diferente, puede darse el caso de que el ritmo sea el mismo, pero que se interprete desfasado, como en el canon rítmico, o bien en su versión retrógrada, es decir, inversa. En todos los casos el resultado es polirrítmico. El *pajarillo*, el *seis corrido* y el *seis derecho* son tres formas polirrítmicas del joropo, una música del llano de Venezuela y Colombia que se caracteriza por la diversidad de ritmos que simultáneamente ejecuta cada uno de los instrumentos típicos de la música llanera, básicamente bandola, arpa, cuatro y maracas. Una de las características rítmicas del joropo es el modo cruzado en que se ejecutan los compases de 6/8. El resultado es:

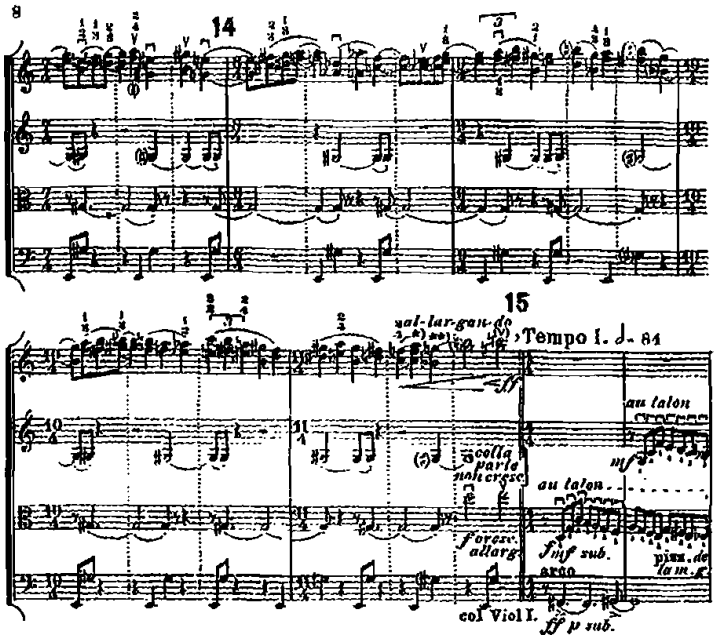
0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0

Un ejemplo muy extendido en la música latinoamericana, y también presente en Europa, es el cruzamiento «tres contra dos», habitualmente escrito como un compás de 6/8 y uno de 3/4 que se ejecutan simultáneamente. En la escritura de unos y ceros tendríamos:

1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0

Amalgamas

Por necesidades compositivas más libres y también por el interés de plasmar en partitura obras procedentes de la música popular de gran riqueza rítmica, el siglo XX ha visto nuevos modos de expresar los ritmos. Así, se ha recurrido a combinar secuencias de compás de duración diferente, como, por ejemplo, en agrupamientos de siete pulsos de negra, ya sea por combinación de un compás 3/4 y de uno de 4/4, o uno de 2/4, uno de 3/4 y otro de 2/4. En un compás de cinco pulsos de negra se podrán agrupar uno de 2/4 y uno de 3/4, o viceversa.



Partitura procedente del Concertino para cuarteto de cuerdas, *de Igor Stravinski, en la que puede apreciarse la enorme variedad rítmica de este gran innovador de la música del siglo xx.*

La velocidad: el metrónomo

Una vez escrita una secuencia rítmica, con sus figuras y silencios, se presenta el reto de reproducirla. Si se trata de un intérprete que nunca ha oído dicha frase musical, podrá reproducir con gran aproximación la idea rítmica del autor, pero echará en falta un elemento esencial: la velocidad. Este aspecto del desarrollo de la música en el tiempo se indica al comienzo de la obra, y en cualquier otro punto en que se presente un cambio de velocidad. La indicación es una figura musical acompañada por un número. Por lo general la figura corresponde al pulso de la obra, y el número indica la cantidad de veces que dicho pulso se articula en un minuto. Así, la indicación

$$\text{♩} = 60$$

significa que en un minuto se articulan 60 pulsos; en este caso, bastaría un reloj para calcular la velocidad de la obra, dado que los pulsos coinciden con los segundos. Para otras velocidades nos servimos de un instrumento que marca pulsos regulares: el metrónomo. En el caso del metrónomo mecánico, se trata de un péndulo cuya frecuencia de oscilación se gradúa por medio de un contrapeso de posición varia-

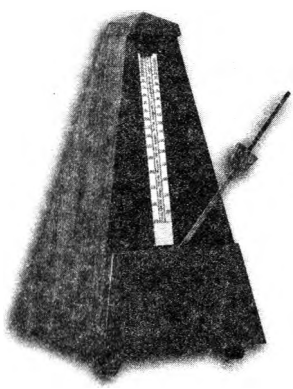
ble; a mayor frecuencia, mayor número de pulsos por minuto. Los músicos lo emplean para ejercitar la regularidad en la ejecución de un instrumento, pero también constituye una herramienta de referencia para que el compositor pueda consignar la velocidad de ejecución de una pieza. El primero en establecer de este modo la velocidad de ejecución de una de sus composiciones fue Ludwig van Beethoven.

Si bien el metrónomo ofrece una medida objetiva de velocidad, como guía de ejecución adolece de un exceso de rigidez: en la interpretación es frecuente y natural un cierto corrimiento del pulso estricto y rígido. Un uso inesperado pero no por ello infrecuente del metrónomo es como instrumento de percusión en algunas obras, como la conocida canción de The Beatles «Blackbird», incluida en el *White Album* del grupo británico. El eminente compositor de música cinematográfica italiano Ennio Morricone incluyó grabaciones distorsionadas y ralentizadas de un metrónomo en el corte «Farewell to Cheyenne» de la banda sonora de *Hasta que llegó su hora*.

El caso más extremo del uso del metrónomo a modo de instrumento se debe al rumano György Ligeti, que en su obra *Poème Symphonique for 100 metronomes* (1962) puso a funcionar de manera simultánea cien de estos instrumentos. La pieza terminó cuando el último de ellos agotó su cuerda.

EL RELOJ DE LA MÚSICA

El metrónomo mecánico fue inventado por el alemán Dietrich Nikolaus Winkel en 1812, aunque la primera patente pertenece a su compatriota Johann Mälzel. Si bien hoy existen metrónomos digitales, originalmente eran piezas de relojería. El más habitual dispone de un sistema de relojería interno y un péndulo invertido, compuesto por una vara y un contrapeso que se desliza a lo largo. Dispone de un sistema de doble contrapeso, uno a cada lado del centro de oscilación: uno externo y variable y otro interno y fijo. Al estar posicionado cerca del centro de oscilación, el período es más corto, es decir, más rápido. Al encontrarse en el extremo más alejado, el pulso marcado será más lento. Por cada oscilación, el mecanismo interno provoca un clic. En algunos metrónomos, es posible ajustar el instrumento para que un sonido especial marque los acentos, cada dos, tres o cuatro pulsos. En la actualidad existen metrónomos electrónicos, que suelen comercializarse combinados con un diapasón, emitiendo un *la* a 440 Hz.



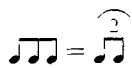
LAS DIFICULTADES DE EINSTEIN CON LAS MATEMÁTICAS

El físico Albert Einstein, creador de la teoría de la relatividad, era también un entusiasta violinista aficionado, aunque quizá no se manejaba en el violín con la misma comodidad con que lo hacía en la ciencia. En una ocasión, el científico se encontraba ensayando una sonata en compañía del eminente pianista y compatriota suyo Artur Schnabel, y Einstein se perdía una y otra vez en un pasaje de la obra, obligando a Schnabel a detenerse. La tercera vez que sucedió lo mismo, Schnabel lo miró con frustración y le espetó: «¡Ach, Albert! ¿Es que no sabes contar?».

Irregularidades aisladas

En ocasiones, dentro de una obra de pulsación regular (por ejemplo, binaria) es necesario expresar puntualmente algunos pulsos ternarios. Con los elementos explicados hasta este momento, indicar un cambio de esa naturaleza implica consignar para el momento en cuestión tanto un cambio de velocidad como otro de compás. Para evitar esa doble lectura (y la nueva doble lectura para recuperar la regularidad), se han diseñado los «dosillos», «tresillos», etcétera:

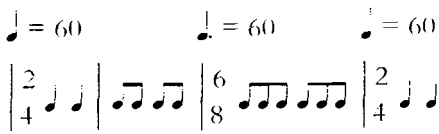
- Dosillo: grupo de dos notas que se articulan en el tiempo correspondiente a tres de ellas.



- Tresillo: grupo de tres notas que se articulan en el tiempo correspondiente a dos de ellas.



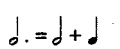
Se consignan con un arco sobre el grupo de figuras y un número correspondiente a la nueva cantidad de figuras. Veamos un ejemplo en una frase rítmica de complicada escritura, con cambio de compás y metrónomo:



LA MATEMÁTICA DE LAS FRACCIONES DE COMPÁS

Es interesante comparar las equivalencias de fracciones de compás con los números fraccionarios y sus operaciones. ¿Hasta qué punto operaciones válidas con fracciones son a su vez correctas cuando lo que se manejan son fracciones de compás?

- Suma de fracciones. Por ejemplo, un compás de 3/4 tiene una duración de una blanca con puntillo, lo que equivale a una blanca (que se representa mediante el símbolo 𝅗𝅥) más una negra:



Si se reemplazan las figuras por sus equivalencias numéricas, se obtiene la correspondencia
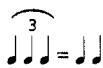
$$3/4 = 1/2 + 1/4.$$

- Simplificación de fracciones. Si se simplifica una fracción de compás se obtiene un resultado comparable a una nueva fracción de compás:

$$6/8 = 3/4.$$
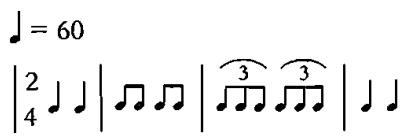
En este caso, la igualdad numérica no corresponde a una igualdad musical. La duración de ambos compases es la misma, seis corcheas (en el caso del compás de 3/4, tres negras, que equivalen a dos corcheas cada una). Sin embargo, la indicación 6/8 corresponde a un compás compuesto, y 3/4 a un compás simple, lo que indica una diferencia musical importante.

- Mínimo común múltiplo. De los distintos casos de polirritmia nos interesan los que enfrentan dos ritmos, uno ternario y otro binario en un mismo pulso o compás. Por ejemplo, en un compás suenan dos pulsos de negra, mientras que otra voz ejecuta tres negras en tresillo de negra:



Esto presenta una disyuntiva sobre la exacta ejecución de cada ritmo. La solución es matemática, y el proceso equivale a calcular el mínimo común múltiplo. En el ejemplo sería el MCM (2,3) = 6. Esto significa que debe pensarse el compás como dividido en seis partes iguales: las negras articulan en las divisiones 1 y 4, y las tres negras del tresillo lo hacen en 1, 3 y 5.

La misma escritura, simplificada ahora por el uso de tresillos:

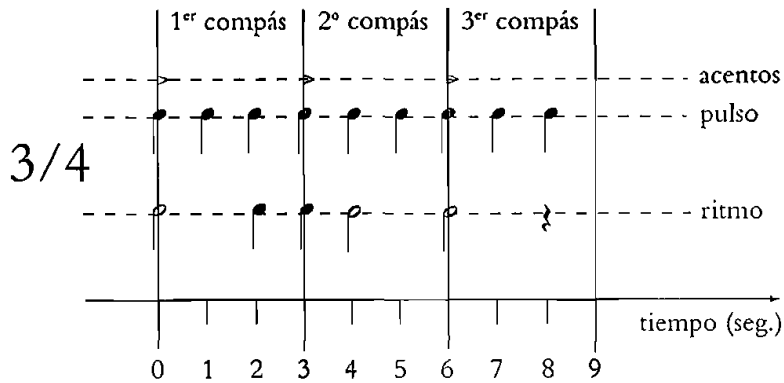


La notación moderna

La notación musical como sistema simbólico ha alcanzado, a lo largo de los siglos, un grado interesante de efectividad. Para lograr su objetivo se recurre a ubicar elementos variables (figuras y silencios) y constantes (tiempo, clave, compás) sobre un sistema de referencia (pentagrama). Veamos un ejemplo completo.

La velocidad es constante: ♩ = 60.

El pulso es de negras, y hay un pulso acentuado por cada dos sin acentuar, por lo que tendremos un compás de 3/4. En el gráfico siguiente se muestra la secuencia de pulsos y acentos como si la partitura fuera un sistema de coordenadas con el tiempo en el eje de abscisas, expresado en segundos.



Los acentos ocurren regularmente a intervalos de tres segundos.

Los pulsos ocurren regularmente a intervalos de un segundo.

La lectura de toda esta información a partir del gráfico anterior es sumamente engorrosa, y la partitura de un ritmo recurre a claves que permiten simplificarla. Para ello se indican al comienzo y una sola vez los valores constantes: pulso y acento y, por ende, compás, mediante el sistema ya conocido de fracciones; en nuestro ejemplo, 3/4.

La velocidad se consigna mediante la indicación metronómica: ♩ = 60.

Manteniendo la idea de horizontalidad del devenir temporal de izquierda a derecha, como en la escritura occidental de textos, podemos ahora añadir líneas verticales que indiquen el final de cada compás, y el gráfico del ritmo anterior queda simplificado:

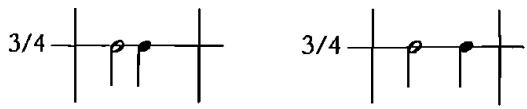


Con la ubicación de las líneas verticales y sabiendo que los pulsos tienen lugar regularmente, no es imprescindible que las figuras se ubiquen respetando una escala de tiempo.

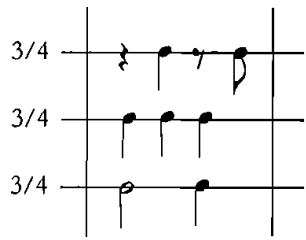
Sin escala

El desarrollo del tiempo en la línea horizontal de una partitura no está a escala. Esto significa que la duración de las figuras o de los silencios no se corresponde necesariamente con la separación de las figuras, sino con el contenido relativo de las mismas. La articulación de un sonido se debe realizar cumpliendo con la duración que establece la figura o el silencio, y no en función de su proximidad gráfica.

Estos dos compases son iguales:



Sin embargo, es importante tener en cuenta que al graficar dos o más líneas musicales que se interpretan simultáneamente, es aconsejable alinear verticalmente las figuras que se articulan en un mismo momento para simplificar la lectura. Así, una representación gráfica correcta de tres frases rítmicas simultáneas se indicaría del modo siguiente:



Capítulo 3

La geometría de la composición

El jarrón da forma al vacío, y la música, al silencio.
Georges Braque

La gente me acusa de que soy un matemático,
pero no soy un matemático, soy un geómetra.
Arnold Schönberg

Es curioso el modo en que la naturaleza organiza las formas. Frente a ese universo morfológico, la mirada sistemática de los matemáticos descubre los patrones numéricos y geométricos que caracterizan a plantas, animales, sonidos y estructuras cristalinas. Las formas esféricas, las secuencias cíclicas y los ordenamientos helicoidales son frecuentes, como también lo es la simetría. Los artistas se nutren de las caprichosas organizaciones de la naturaleza para otorgar a la materia un nuevo orden, el orden de lo estético.

La música genera imágenes en la mente del oyente. Las melodías suelen asociarse a un dibujo con puntos y curvas. Solemos pensar en ciertas características de la música como si en realidad tuviesen existencia en el espacio: los sonidos agudos se visualizan arriba con un aspecto delgado, mientras que los graves, en cambio, se imaginan abajo y son gruesos. De algún modo, algunas de estas sensaciones se ven reflejadas en las partituras, como es el caso de la idea de arriba y abajo. Por ejemplo, una melodía que encadena sonidos cada vez más agudos se dice que es «ascendente».

Este hecho aporta a la partitura un valor extra al acompañar la idea musical con una imagen; es algo así como un cuento ilustrado. Estas sensaciones han sido tenidas en cuenta por muchos compositores a la hora de plantear sus obras, y en la historia de la música son numerosos los ejemplos de obras musicales con interesantes diseños, a caballo entre la música, la escritura y la geometría. (Para poder apreciar en mayor medida los ejemplos de este capítulo, le sugerimos dar un repaso a los elementos fundamentales de la notación musical moderna, que se encuentran en el anexo I.)

Altura + ritmo: el plano musical

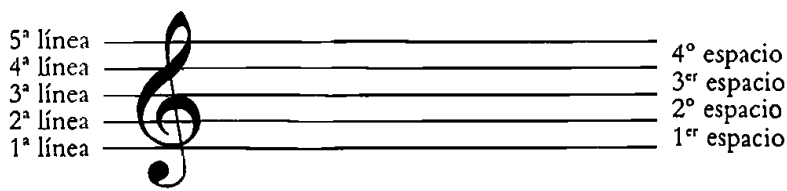
Los elementos de la escritura musical

El sistema actual de escritura musical es el producto de un proceso evolutivo histórico, orientado a plasmar en papel un arte etéreo. En este camino ha ido incorporando y modificando una serie de signos y elementos gráficos que resulta interesante evaluar desde una óptica lógico-matemática.

El pentagrama

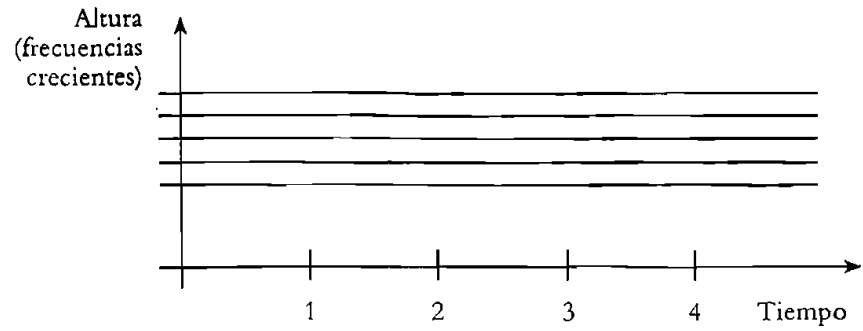
El modo gráfico de representar la música es el pentagrama, que puede considerarse como un desarrollo en el tiempo de la altura de los sonidos. Si lo comparamos con un sistema de coordenadas, tendremos el «tiempo» en el eje horizontal, mientras que la «altura» se situará en el vertical. Esta segunda variable se indica mediante una serie de rectas paralelas y equidistantes, que en tiempos modernos quedó fijada en cinco.

La «distancia musical» entre dos líneas vecinas (o entre dos espacios vecinos) es un intervalo de tercera; entre una línea y un espacio vecinos, es un intervalo de segunda. Quedan así determinadas cinco líneas y cuatro espacios, que se numeran de abajo arriba:

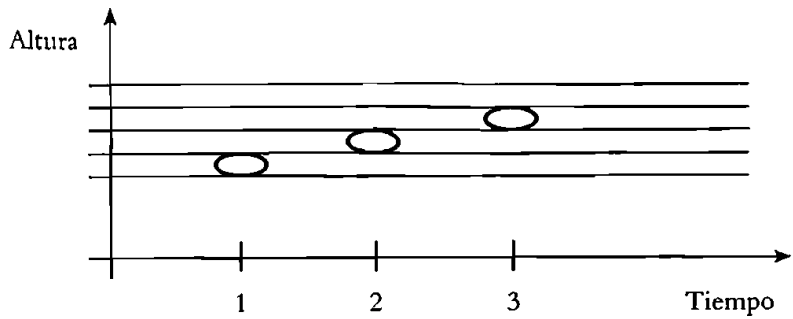


La distribución de líneas y espacios es equivalente a las teclas blancas del teclado, y su número es directamente proporcional a las frecuencias de las notas. Así, sonidos de mayor frecuencia (los más agudos) se ubican en posiciones más altas en el pentagrama. Con objeto de consignar notas más agudas o más graves se agregan líneas adicionales. Esto genera, obviamente, espacios adicionales. De hecho, el primer espacio sobre la 5ª línea y el primero bajo la 1ª son espacios adicionales.

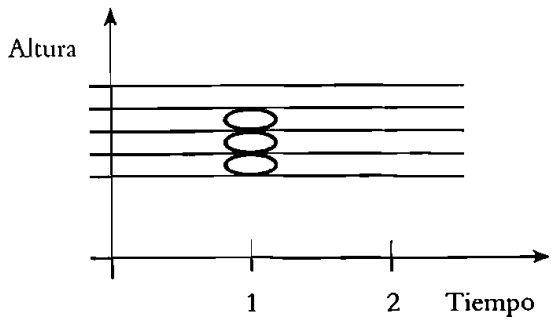
Si recuperamos la idea de la partitura como un eje de coordenadas tendido sobre el «plano musical», veremos que el eje de ordenadas determina la altura.



El eje de abscisas, a su vez, determina el tiempo del sonido y sus silencios. Por ejemplo, tres sonidos de altura creciente que se articulan consecutivamente en los instantes 1, 2 y 3 se representan del siguiente modo:



Si estos tres mismos sonidos se reprodujeran de forma simultánea en el instante 1 se representarían así:



En resumen, diremos que los sonidos ubicados sobre una misma línea o espacio del pentagrama (los alineados horizontalmente) tienen igual altura (frecuencia), mientras que los indicados en una misma posición del tiempo (alineados verticalmente) son simultáneos.

Las figuras

Las figuras musicales constituyen un código que indica la duración del sonido que representan. Los elementos que se combinan para lograrlo son la «cabeza», un pequeño óvalo blanco o negro; la «plica», un segmento vertical que en un extremo tiene la cabeza y en el otro, si corresponde, el «corchete», pequeña línea curva ubicada en el extremo opuesto a la cabeza, sobre la plica.



La secuencia de figuras según su duración, de mayor a menor, es: redonda, blanca, negra, corchea, semicorchea, fusa y semifusa. La figura base es la redonda y a ella se le asigna una duración de 1. La que corresponde a las demás figuras es, consecutivamente, la mitad que la anterior. Le sigue la blanca, que, por tanto, dura la mitad que una redonda; esto significa que en el tiempo que dura el sonido de una redonda se pueden articular dos blancas. En el tiempo de articulación de una blanca, se articulan dos negras. La misma relación binaria se repite para el resto de las figuras:

Nombre	Figura	Duración con respecto a la redonda
Redonda	𝅝	1
Blanca	𝅗𝅥	1/2
Negra	♩	1/4
Corchea	♪	1/8
Semicorchea	𝅘𝅥𝅯	1/16
Fusa	𝅘𝅥𝅰	1/32
Semifusa	𝅘𝅥𝅱	1/64

La función de las figuras y sus propiedades se exponen con mayor detalle en el anexo I, bajo el epígrafe «La música y sus símbolos».

Consignando las alturas

La altura a la que el sonido se ejecuta (el tono) viene representada por la posición de la cabeza de la figura en el pentagrama, ya sea en una línea o en un espacio.

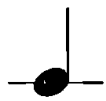


Figura en una línea

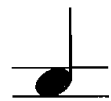


Figura en un espacio

Hasta el momento, la información es parcial: para conocer la altura absoluta relativa entre los sonidos es necesario recurrir a una clave que desvele el secreto.

Las claves

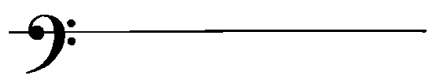
En el capítulo anterior hemos visto que, para fijar la velocidad y el ritmo, es necesario establecer una indicación metronómica y una fracción de compás al comienzo de una obra. Del mismo modo, es preciso colocar una «clave» al comienzo del pentagrama que determine unívocamente la altura de los sonidos.

La clave utilizada con más asiduidad es la clave de *sol*. La presencia de este signo al comienzo del pentagrama, como se ve en la figura, indica que todas las figuras cuya cabeza se ubica en la segunda línea son *sol*.



Descendiendo en la escala de notas ya conocida, el primer espacio será un *fa*, la primera línea un *mi*, etc. Ascendiendo, se llega al 2° espacio, que es un *la*; la 3ª línea, un *si*; el 3er espacio, un *do*, etc. La línea determinada como *sol* es la que pasa por el punto central, donde nace el dibujo.
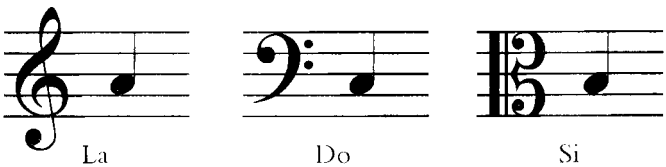
Otra de las claves empleadas en notación musical es la de *fa*, un signo espiralado, que asigna sonido *fa* a la línea donde se sitúa el punto central de la espiral. La posición de la línea se ve reforzada por un punto encima y otro debajo de la misma:



La clave de *do* se expresa con un signo simétrico que indica que la línea situada en su eje de simetría es un *do*:

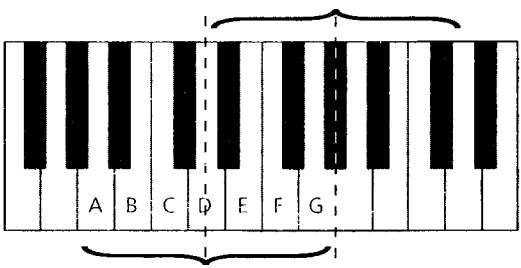


Según sea la posición en que se colocan las claves respectivas, la altura de cada línea y de cada espacio queda alterada. Así, una misma posición de una figura corresponde a distintas notas, según la clave utilizada.



SIMETRÍAS EN EL TECLADO

El teclado del piano presenta dos ejes de simetría visuales: uno es la tecla blanca *re*; el otro, la tecla negra *sol sostenido*. Casualmente, la nomenclatura utilizada en el centro de Europa (ABCDEFG) tiene su nota central en D (*re*), y distribuye los otros seis sonidos a ambos lados de dicho eje de simetría.
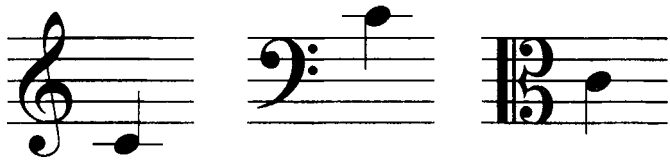


Veamos el modo en que se distribuyen los tonos y semitonos en las escalas. Se denomina «escala mayor» a la serie de siete sonidos separados entre sí según la siguiente distribución de tonos (T) y semitonos (sT):

T-T-sT-T-T-sT.

La escala mayor que utiliza solamente teclas blancas es la que comienza en *do*:

do, re, mi, fa, sol, la, si.

Veamos ahora un mismo sonido (el *do* central) representado también en tres claves diferentes:



Clave de *sol* en 2ª línea | Clave de *fa* en 4ª línea | Clave de *do* en 3ª línea

El esquema de la página anterior muestra una figura en una misma ubicación del pentagrama, resignificada por distintas claves. Sobre estas líneas, un único sonido se encuentra representado en tres claves diferentes.

Se denomina «escala menor natural» a la serie de siete sonidos separados entre sí, según la siguiente distribución de tonos y semitonos:

T-sT-T-T-sT-T.

La escala menor que utiliza solamente teclas blancas es la que comienza en *la*:

la, si, do, re, mi, fa, sol.

Ése es justamente el caso de simetría con eje en la tecla *re* que vimos en el teclado. No es difícil observar que los tonos y semitonos se distribuyen simétricamente:

la T *si* sT *do* T *re* T *mi* sT *fa* T *sol*

Entre el *sol* y el siguiente *la* se encuentra el otro eje de simetría: es obvio que también con respecto a dicho eje existe una simetría de intervalos entre teclas. Lo que a simple vista se puede observar con la distribución de teclas negras y blancas en el teclado tiene su correlato con respecto a los mismos ejes de simetría en la distribución de tonos y semitonos. Por ser nuestro ámbito sonoro actual una cadena de doce semitonos iguales, con cualquier nota que se tome como central podrá encontrarse una colección de notas que distribuyan simétricamente los intervalos de tono y semitono, pero en el caso particular considerado, dicha simetría se corresponde con una simetría visual en el teclado.

Variando semitonos

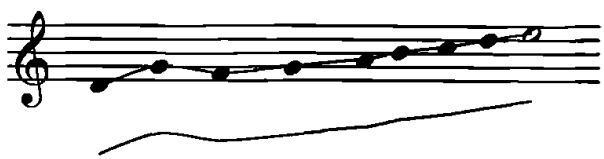
En ocasiones es necesario modificar la altura de alguna de las notas. Existen dos signos que aumentan o disminuyen la altura de un sonido en un semitono: el signo ♯ (sostenido) lo eleva, mientras que el signo ♭ (bemol) lo hace descender. Existe un tercer signo que anula el efecto de un sostenido o bemol: el becuadro (♮).

♯	♭	♮
Sostenido	Bemol	Becuadro

Estos signos se colocan sobre la línea o el espacio que se pretenden modificar, y alteran los sonidos situados a su derecha por el resto del compás. Ubicados al comienzo de una obra (entre la clave y la fracción de compás), los sostenidos, bemoles y becuadros indican que, para toda la obra (o hasta un nuevo cambio), las alturas de las notas situadas en dicha línea o espacio quedan alteradas.

La curva melódica

Sin necesidad de saber leer o escribir música, la audición de una melodía a menudo hace que el oyente evoque una línea con curvas y tramos rectos, por momentos ascendente y en otros descendente. Es muy posible que esta curva se «lea» de izquierda a derecha, como si de una frase escrita se tratara. Algunas melodías se nos presentan como curvas suaves, sin grandes sobresaltos; otras, en cambio, muestran marcados cambios de alturas. Es interesante observar que existe cierta correspondencia entre esas imágenes y el dibujo que puede realizarse sobre las notas de una melodía en un pentagrama. Pasemos ahora a una partitura y, como en el conocido juego «dibuja uniendo los puntos», unamos las cabezas de las figuras con una línea continua:



Una melodía suave y una curva que la representa.

Si pudiésemos oír la línea levemente ondulada del ejemplo anterior, apreciaríamos que se trata de una melodía sin sobresaltos. Del mismo modo, una melodía con

grandes saltos arrojará una curva con importantes cambios de altura, como la que se muestra a continuación:



Una melodía con grandes cambios de altura.

Transformaciones geométrico-musicales

Según la escuela psicológica de la Gestalt (término que, por cierto, no admite una traducción única, pudiéndose equiparar a conceptos como «forma», «estructura», o «configuración»), la mente es capaz de seleccionar y agrupar las partes de un todo, y ordenarlo en una forma que se distingue del resto. Este mismo proceso ocurre en el tiempo gracias a la memoria, lo que nos permite observar movimiento en una tira de dibujos animados o apreciar la construcción de una obra musical. La Gestalt ha estudiado los procesos de la percepción y establecido ciertos principios que los caracterizan. Según el Principio del cierre, nuestra mente tiende espontáneamente a completar figuras incompletas. Así, imágenes con información parcial, como los paisajes impresionistas construidos a base de miles de pinceladas sueltas, vistos a cierta distancia construyen mágicamente un todo continuo y verosímil, y lo mismo ocurre con las imágenes congeladas del medio cinematográfico, cuyo movimiento continuo es, en realidad, una (bella) ilusión mental. Las leyes de la Gestalt se aplican por igual a la música, y permiten a un oyente identificar patrones y similitudes entre eventos sonoros que se suceden en el tiempo, de manera semejante a como un espectador lleva a cabo el mismo ejercicio con las imágenes de una película.
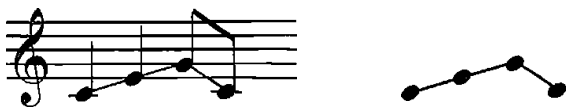
Muchas nociones de la geometría han sido utilizadas por diversos compositores de manera deliberada como herramienta compositiva. En ciertos casos, el aspecto geométrico-musical se manifiesta visualmente en la partitura; en otros, directamente en el sonido. Algunas composiciones tienen estructuras formales con curiosidades geométricas, como el canon; su propia forma condiciona fuertemente las melodías, lo que lo convierte en un doble desafío para el compositor, que busca crear una pieza musical bella respetando al mismo tiempo estrictos criterios mate-

máticos. Otras obras reflejan el uso deliberado de la transformación geométrica como recurso compositivo.

En este apartado vamos a establecer una descripción comparativa de distintas transformaciones geométricas y de algunas particulares combinaciones de sonidos. Es importante tener en cuenta que existe una diferencia fundamental que condiciona las comparaciones: en el plano, las dos dimensiones corresponden a una misma magnitud, pero en el pentagrama no es así. Esta particularidad impone la aplicación de las transformaciones musicales en ambas dimensiones (altura y tiempo) por separado.

Es posible también aplicar transformaciones a las figuras musicales, como si se tratase de figuras geométricas en el plano, pero en algunos casos estaremos frente a un ejercicio que no genera diferencias audibles.
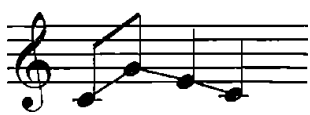
Asimismo, es importante tener en cuenta que las transformaciones se realizan sobre la curva que forman las cabezas de las notas. Consideremos el ejemplo de una melodía de cuatro sonidos que, unidos con rectas, presentan el siguiente diseño:



Tras aplicar al dibujo una transformación...



...se devuelve a cada cabeza su plica y su corchete correspondientes:



Las transformaciones geométrico-musicales brindan una herramienta compositiva más que añadir al arsenal, pero utilizarla con sutileza, encanto y sentido musical es atributo exclusivo, y necesario, del compositor.

Transformaciones isométricas

«Isométrico» significa que respeta las distancias. Existen tres tipos de transformaciones isométricas en el plano: *traslación, reflexión* y *rotación,* que tienen su correlato en los grafismos musicales. Al considerar por separado las transformaciones en altura y en el tiempo, se multiplica la variedad de transformaciones posibles. La siguiente tabla las detalla todas a modo de resumen previo:

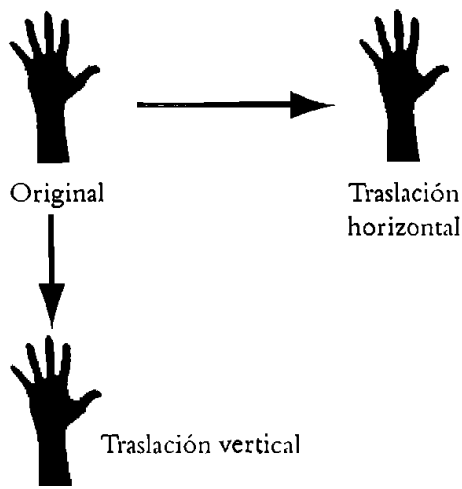
Transformación geométrica	Resultado musical		
	Horizontal	Vertical	Horizontal + vertical
Traslación	1. Repetición 2. Canon	Transporte	1. Ostinatos 2. Canon a la 2ª, la 4ª, etc.
Reflexión	Inversión	Retrogradación	
Rotación (180°, entendida como combinación de dos reflexiones)			Inversión retrógrada

La cantidad de alternativas posibles aumenta por combinación de algunas de estas transformaciones:

Combinación de transformaciones	Resultado musical
Traslación vertical + *Reflexión vertical*	Transporte retrógrado
Traslación vertical + *Reflexión horizontal*	Transporte invertido

Traslaciones

La traslación es aquella transformación geométrica que, al aplicarse, genera un desplazamiento de la figura afectada en una dirección, sin modificar su forma ni sufrir rotación alguna. Para el caso que nos ocupa, basta con considerar la traslación horizontal y la vertical, tal como se muestra en la figura de la derecha.
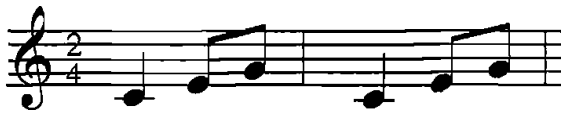


Traslación horizontal: repetición y canon

La traslación horizontal implica, para el caso de la partitura, una traslación en el tiempo, y tiene dos manifestaciones musicales:

– La repetición: una melodía o un fragmento son interpretados varias veces, uno a continuación del otro:

$$O \rightarrow O \rightarrow O \rightarrow O \rightarrow O \rightarrow O \rightarrow O \rightarrow O \rightarrow O$$

El caso mas sencillo de traslación horizontal es la repetición de un motivo, continuando con la línea melódica.
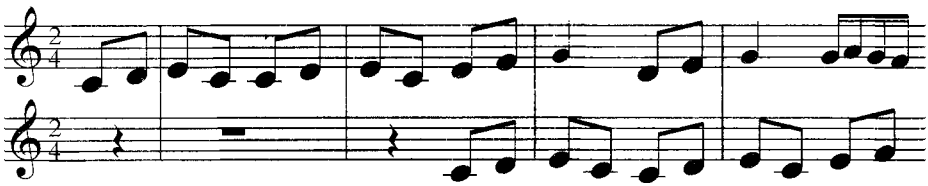


Melodía original — Melodía trasladada horizontalmente

– El canon: como vimos en el capítulo anterior, se trata de una estructura musical en la que una melodía es interpretada por varias voces, de manera simultánea, pero comenzando cada una su participación tras algunos tiempos de espera desde la entrada de la voz anterior.

voz 1 →	A	B	C	D	...
voz 2 →		A	B	C	...
voz 3 →			A	B	...

Tomemos a modo de ejemplo un canon muy conocido, la canción infantil francesa *Frère Jacques*. Tomando las primeras cuatro corcheas como melodía original, observamos que dicha melodía se repite (traslación). Transcurrida la primera idea musical, la melodía continúa desarrollándose en los compases siguientes, en tanto que da comienzo una copia de la melodía original (en el ejemplo, se la escribe en otro pentagrama para permitir la visualización de cada voz independiente). A partir de ese momento, ambas melodías (original y copia desplazada) avanzan simultáneamente, con un solapamiento constante. Observemos los cuatro primeros compases:
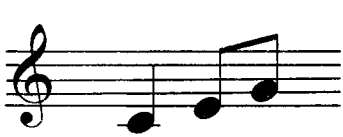


Los dos casos de traslación horizontal ocurren en el tiempo. Una tercera traslación modifica verticalmente la posición en la partitura: es un «transporte».

UNA NANA DE ALCANCE UNIVERSAL
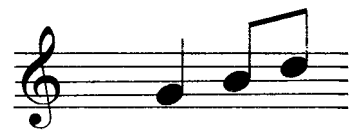
El origen de la melodía *Frère Jacques* (en francés, «Hermano Jacques») es objeto de disputa, como lo es también el de su letra. Existen pocas dudas acerca de que la primera plasmación escrita de la melodía, bajo el título de «Frère Blaise», data de finales del siglo XVIII. Sin embargo, hay investigadores que señalan obvias coincidencias entre la canción y la melodía de una pieza de 1615 del italiano Girolamo Frescobaldi. Algunos estudiosos han visto en su letra («Frère Jacques, frére Jacques / Dormez-vous? Dormez-vous? / Sonnez les matines! Sonnez les matines! [...]», que podría traducirse, sin repeticiones, por: «Hermano Jacques / ¿Estás durmiendo? / ¡Haced sonar los maitines!») una burla a los protestantes, a los judíos o incluso al propio Martín Lutero. Otros han leído en ella un reproche a la molicie de los monjes jacobinos, vistos en Francia como vividores del clero. Esta nana, que conoce traducciones en la mayoría de las lenguas occidentales, se encuentra tan extendida por el mundo que una encuesta reciente entre escolares chinos reveló que éstos la creían una canción del acervo popular de su país.

Traslación vertical: transporte

En el eje vertical, la traslación isométrica de las notas genera un transporte. Se obtiene la misma melodía, pero en una entonación más aguda o más grave, según se ascienda o se descienda en el pentagrama:
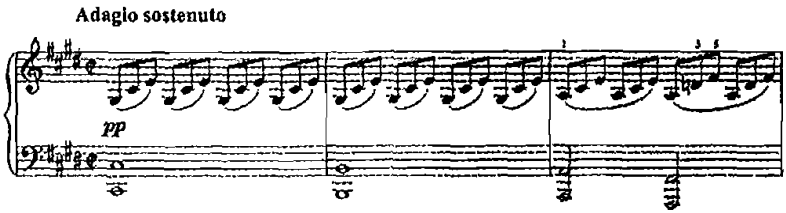


Melodía original
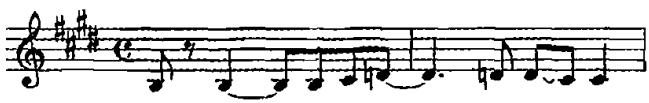


Melodía transportada una 5ª ascendente

El transporte de una melodía es un tema que merecería un desarrollo más profundo. El ejemplo elegido es una muestra que ilustra el principio más elemental de cómo transportar una melodía.

Los siguientes ejemplos, tomados de música de diversos orígenes y estilos, ilustran algunos de los usos más característicos de la simetría de traslación en la composición. En la *Sonata* op. 27 n° 2, conocida como *Claro de luna*, Ludwig van Beethoven (1770-1827) utiliza un arpegio de tres notas repetido como generador de textura.
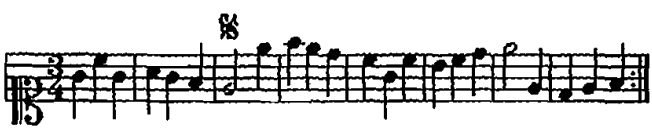


En el rock, los *riffs* son unas breves y rítmicas melodías, generalmente a cargo de una guitarra, y que suelen tocarse repetidamente una vez tras otra. Éste es el caso de *(I Can't Get No) Satisfaction*, de los Rolling Stones, que contiene uno de los *riffs* más famosos de la historia.
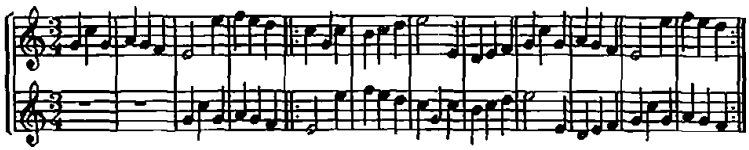


La repetición insistente de cualquier elemento musical (como es el caso de los dos ejemplos anteriores) recibe el nombre de «ostinato».
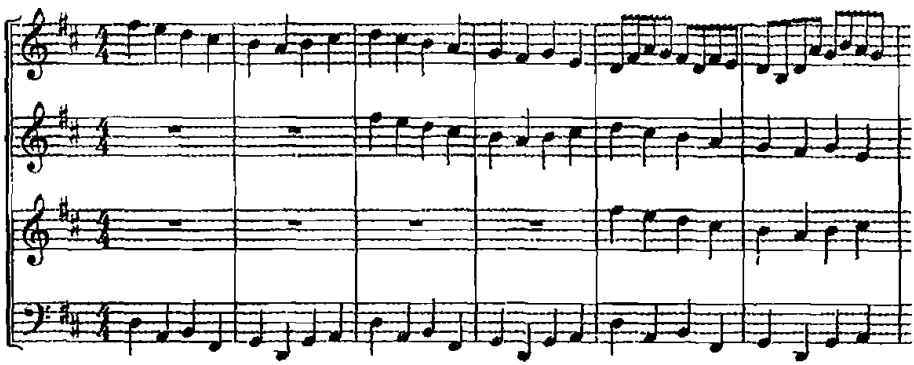
En lo tocante a las más elaboradas repeticiones propias de los cánones, tomaremos un ejemplo del maestro de maestros en este ámbito, Johann Sebastian Bach (1685-1750). Bach explotó este recurso formal por medio de ingeniosísimos diseños. Su habilidad en este arte era tal que tenía por costumbre regalar pequeñas obras en forma de canon especialmente escritas y dedicadas. En este caso, se trata de su *Canon a 2, perpetuus* BWV 1075, una pequeña obra de ocho compases, pensada para ser interpretada a dos voces, desplazadas en dos compases; por su estructura, la obra entra en un ciclo que podría durar eternamente:



Aquí, el canon desarrollado:
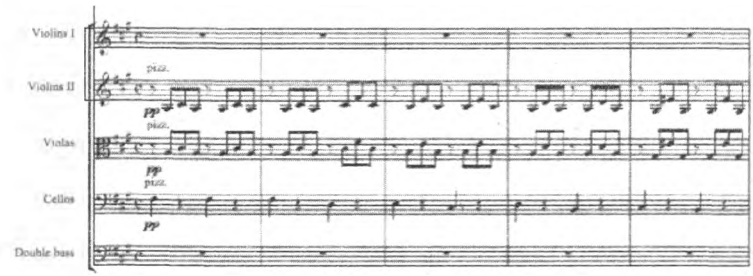


Tal vez uno de los cánones más célebres de la historia sea el debido al compositor alemán Johann Pachelbel (1653-1706). Su canon en *re* se hizo célebre tras su inclusión en la banda sonora de la película *Gente corriente* (1980), está escrito simultáneamente como un canon y una chacona, por lo que combina los dos tipos de traslación horizontal.

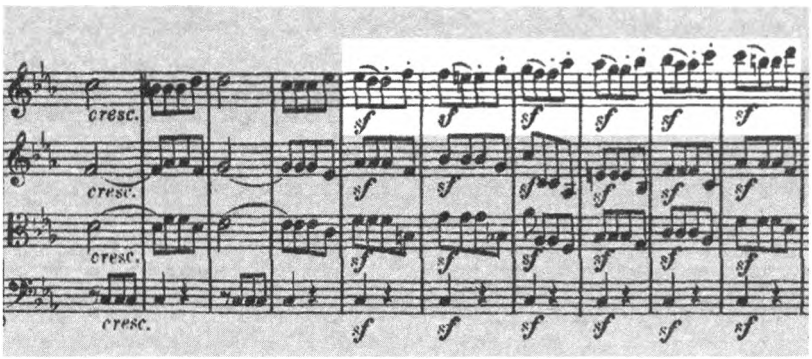


La chacona es una forma de tema con variaciones en la que el bajo repite una y otra vez un mismo fragmento, sobre el cual el resto de las voces va tejiendo las variaciones. En este caso, las variaciones son interpretadas por tres voces superiores en canon, en una estructura que Pachelbel aprovecha hábilmente. Sobre una cadencia armónica que se repite cíclicamente (y que ha sido reutilizada muchas veces a lo largo de la historia), el clima de la pieza va desarrollándose progresivamente y sin sobresaltos, yendo y viniendo de pasajes calmos o melancólicos a otros eufóricos o radiantes.

Podemos citar también la *Pavana* op. 50 del compositor francés Gabriel Fauré (1845-1924), cuyo comienzo incluye un primer motivo doblemente repetido (compás 1 y mitad del compás 2) por los chelos, las violas y los violines segundos.



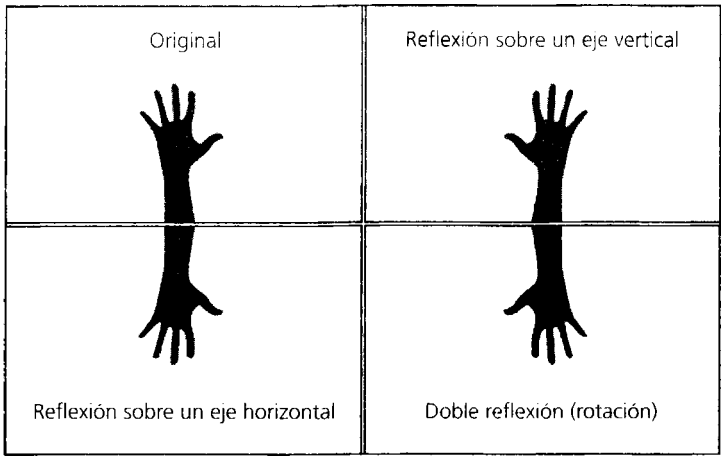
La célebre *Sinfonía nº 5 en do menor* op. 67 de Ludwig van Beethoven (1770-1827) nos ofrece el siguiente ejemplo, en el que se observa un traslado en diagonal que combina lo horizontal y lo vertical. En la voz superior (resaltada en la partitura de abajo), un mismo giro melódico de un compás de extensión se va repitiendo de manera encadenada transportado de manera ascendente.



Reflexiones

La reflexión es una transformación que altera la imagen invirtiéndola, como si estuviéramos viendo su reflejo en un espejo. La reflexión de una figura genera una copia quiral de ella, es decir, que una simple rotación no nos devolvería la imagen original (piénsese en el reflejo de la imagen de un hombre con un parche, por ejemplo, en el ojo derecho).

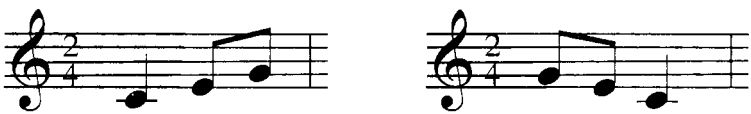
La quiralidad original se recupera, eso sí, al realizar una doble reflexión, es decir, al reflejar el reflejo en un segundo espejo. Las reflexiones que vamos a explorar aquí son dos: sobre un eje horizontal y sobre un eje vertical. La combinación de ambas da como resultado una rotación de 180°, como se observa en la imagen:



Por aplicación de reflexiones a motivos musicales se obtienen nuevos motivos que son «inversiones» y «retrogradaciones» de sus respectivos originales.
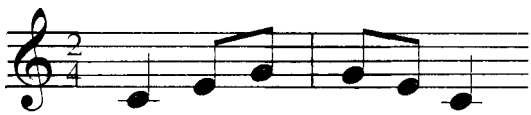
Reflexión sobre un eje vertical: retrogradación

Se trata del caso en que una melodía es rescrita comenzando desde la última nota, desandando el camino, de manera que se repiten las notas de la melodía original en la secuencia contraria:



Melodía original Retrógrada

Si se ejecutan ambas melodías, la original y la retrógrada, una a continuación de la otra, estaremos ante un caso de «simetría melódica», que por su carácter horizontal, bien podría llamarse «palíndromo melódico».
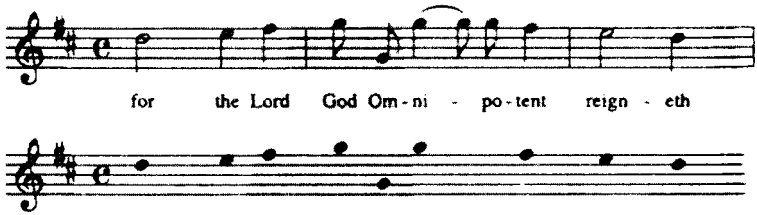


Melodía simétrica

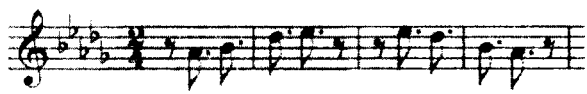
A N I L I N A

Palíndromo

Un caso muy conocido es el «Aleluya» del oratorio *El Mesías*, de Georg Friedrich Haendel (1685-1759).

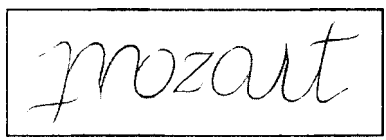


La misma simetría puede apreciarse en el comienzo de *I've got Rhythm*, la conocida canción del genial compositor estadounidense George Gershwin (1898-1937):



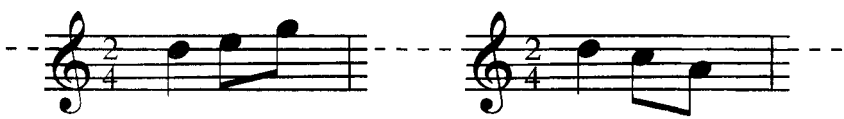
LOS AMBIGRAMAS

Los capicúas y palíndromos son instancias bien conocidas de simetría en cifras y letras, respectivamente. Menos conocidos son los ambigramas, esto es, imágenes que representan un texto dibujado de modo que al aplicarle una transformación (reflexión, rotación, etc.) dan como resultado el mismo texto original u otro relacionado. Aquí vemos uno por rotación sobre el nombre de Mozart, debido al estadounidense Scott Kim.



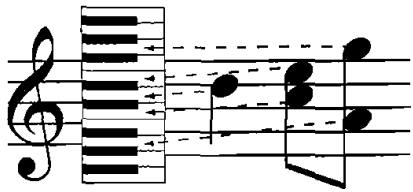
Reflexión sobre un eje horizontal: inversión

Veamos ahora la inversión de una melodía simple, la que se refleja horizontalmente con eje de simetría en la línea *re*:

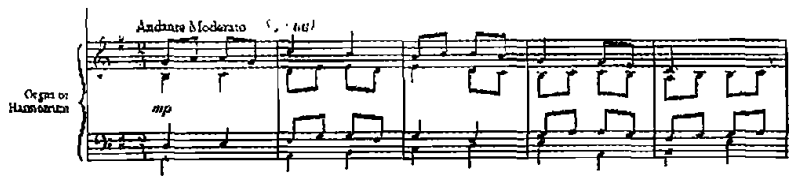


Melodía original Inversión
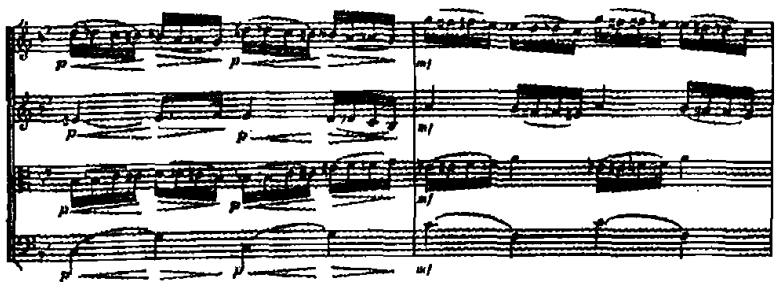
Del gráfico siguiente salta a la vista que ejecutando estas melodías simultáneamente en el teclado de un piano, las dos melodías presentan un diseño simétrico en las teclas presionadas con respecto al *re*:
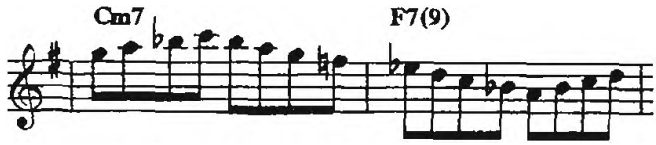


Fauré, en el *Agnus Dei* de su «Messe basse» toma la reflexión vertical como estructura base de esta parte. En los compases iniciales, las dos primeras corcheas se reflejan para completar el compás:



En este pasaje del *Cuarteto para cuerdas en Sol menor* op. 10 del francés Claude Debussy (1862-1918), el primer violín y la viola alternan todo el tiempo movimiento contrario (es decir, en espejo) y movimiento paralelo:
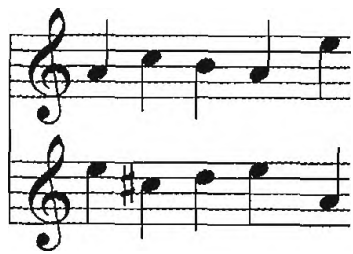


El estribillo de *Samba de una nota sola*, del compositor brasileño Antonio Carlos Jobim (1927-1994) presenta un segundo compás que es una rotación de 180° del primero:
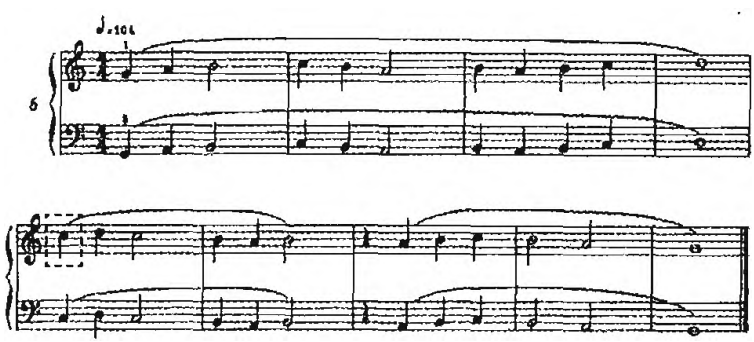


Los veinticuatro caprichos del violinista y compositor italiano Niccolò Paganini (1782-1840) han inspirado numerosas variaciones, las más célebres de las cuales sean tal vez las de Sergéi Rachmaninov (1873-1943). El *Capricho nº 24*, en concreto, inspiró al compositor ruso una versión simétrica (inversión) del mismo:

Paganini
(Fragmento del *Capricho nº 24*)

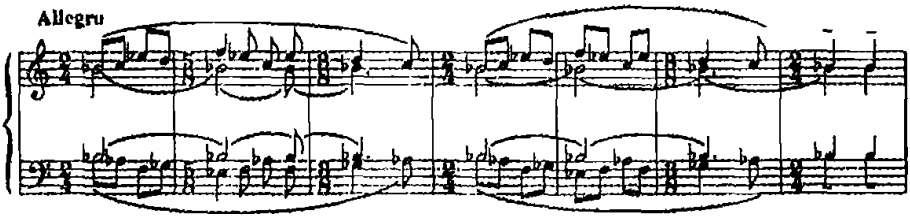
Rachmaninoff
(Inversión: *Variación nº 18*)



En algunos casos, como en la sexta de las «Six unison melodies» del *Microkosmos* de Béla Bartók (1881-1945), las melodías mantienen una simetría en sus alturas, pero no en sus duraciones. El eje de simetría está sobre la primera nota *(do)* del segundo sistema, destacada en el pentagrama con un recuadro punteado.
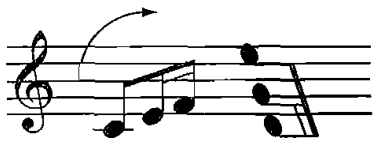


Finalmente, en el siguiente ejemplo la tarea de las dos manos simétrica respecto de los *si bemol* iniciales:
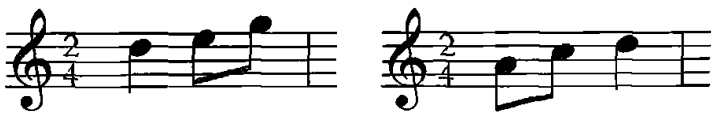


Rotaciones

Recordemos que una rotación de 180° es equivalente a una inversión retrógrada. Es la única que tiene sentido evaluar en el marco de este texto, ya que existe cierto correlato entre el concepto geométrico y la percepción del ejercicio musical realizado. En cambio, una rotación simple de 90° no tiene sentido musical alguno, como puede verse en el ejemplo:
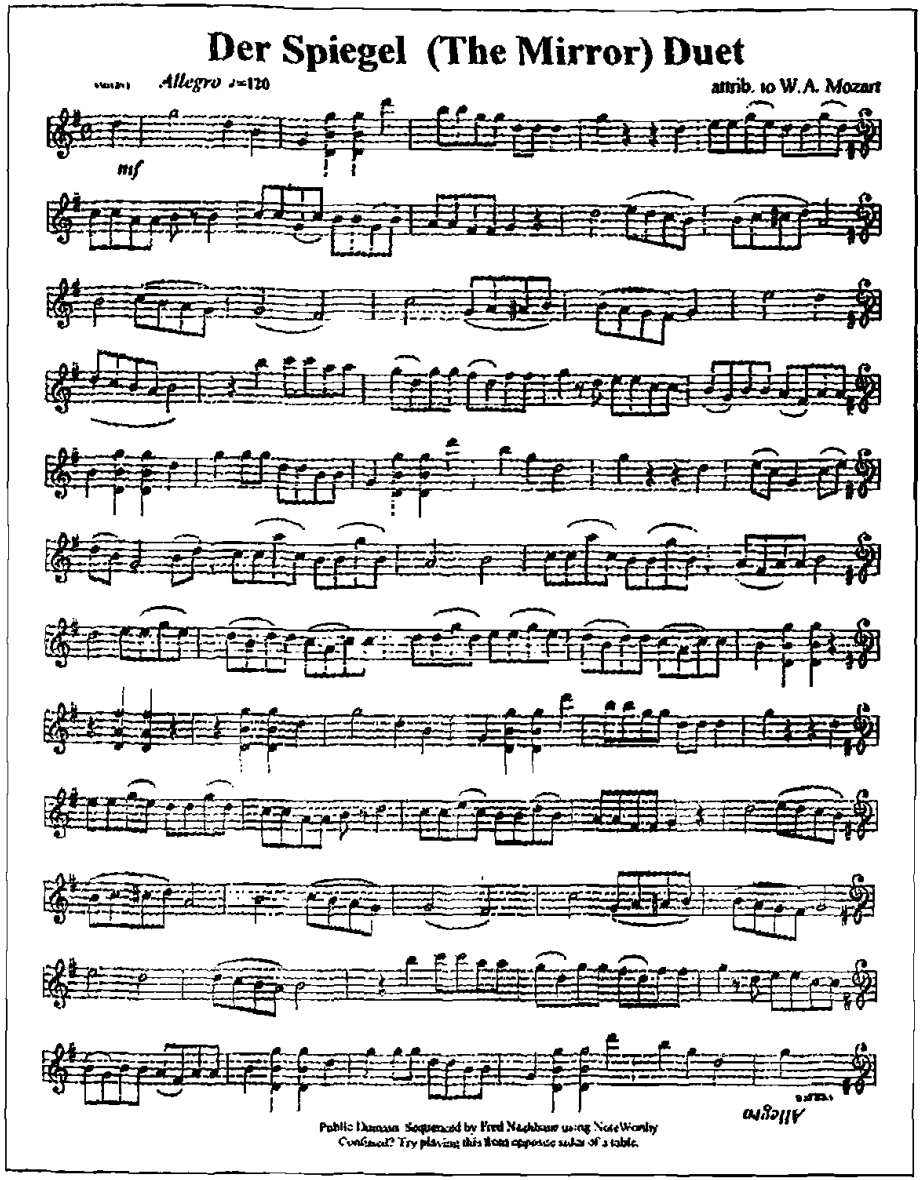


Al igual que en geometría, una rotación de 180° puede pensarse como una doble inversión horizontal y vertical:



Melodía original Inversión retrógada

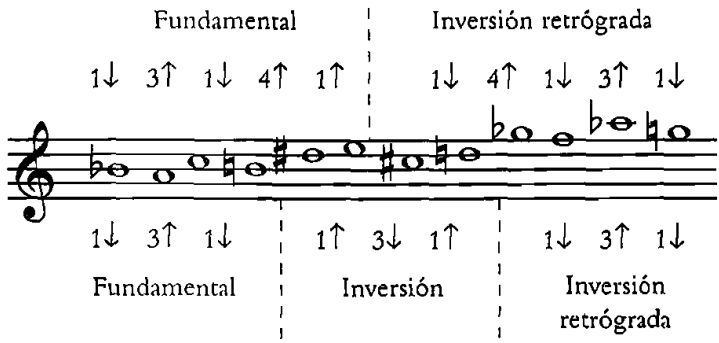
El genio de Wolfgang Amadeus Mozart (1756-1791) brilla especialmente en una composición no demasiado conocida. Se trata de un canon reversible, una obra escrita para dos violines, cuyas melodías están rotadas 180° una con respecto a la otra. Si pensamos en la rotación como en una doble reflexión, aparece la gracia lúdica de Mozart en practicar la reflexión horizontal, situando el eje en la línea *si*. Por esa razón puede escribirse sobre un único pentagrama, con una única línea melódica. A la hora de ejecutar esta obra, los intérpretes se sitúan enfrentados, con la partitura entre ellos; esto es posible gracias al agregado de una clave de *sol* en cada extremo del pentagrama, una invertida con respecto a la otra: de este modo, al invertir la página, un *sol* es un *re*, un *la* es un *do*, etc, manteniéndose invariable únicamente el *si*:



En El espejo *de Mozart, dos violinistas pueden tocar la misma partitura pero en sentido inverso, disponiéndose uno frente al otro.*

El compositor austriaco Anton Webern (1883-1945) es una de las figuras clave de la música dodecafónica, estilo que marcó profundamente la música académica de comienzos del siglo XX. En su *Cuarteto para cuerdas* op. 28, el autor determina, como

paso inicial en la creación, una serie de sonidos sobre los que se establecen sus relaciones interválicas. En esta pieza puede observarse una forma fundamental, su retrógrada y su inversión. Además, la serie presenta, en su mitad, simetría retrógrada e inversión.



Serie de doce sonidos del Cuarteto para cuerdas *op. 28 de Anton Webern. Los números indican los semitonos de cada intervalo. Las flechas indican si el intervalo es ascendente o descendente.*

Combinadas
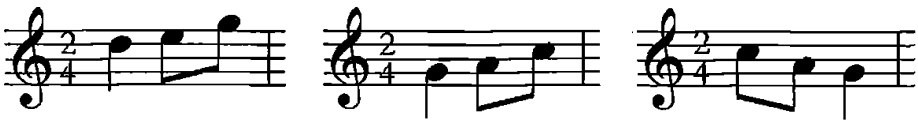
Las transformaciones anteriores se han combinado de manera ingeniosa en distintas obras a lo largo de la historia. Constituyen un abanico de herramientas disponibles para la creación, que se potencian por la posibilidad de variar los elementos de la transformación: las diferentes ubicaciones del eje de simetría en las reflexiones, la distancia interválica de las traslaciones verticales o la distancia horizontal de las entradas en cánones.

La idea original del canon de jugar con la imitación de una voz por parte de otra u otras ha sido enriquecida por los músicos con otros tipos de imitaciones que han recurrido también a simetrías y retrogradaciones de la mayor originalidad.

Traslación horizontal más traslación vertical: el canon a intervalos
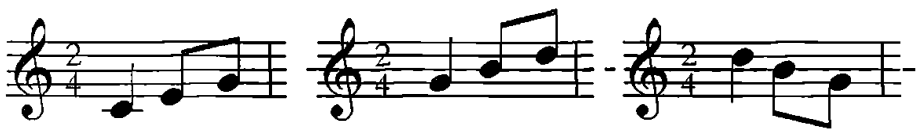
La esencia formal del canon contempla que la segunda voz comience desplazada horizontalmente. Si a esta traslación se le suma un desplazamiento vertical, nos hallamos frente a un canon con entradas a intervalos: la segunda voz inicia la melodía en una nota diferente a la que da comienzo al motivo original. Esta situación fuerza la modificación de algunos tonos y semitonos, lo que se conoce como «respuesta tonal». La distancia a la que entra la segunda voz permite una primera clasificación de los cánones: canon a la primera, si entra al unísono; a la segunda, si entra a una segunda; a la tercera, si entra a una tercera, etcétera.

Traslación vertical más reflexión sobre un eje vertical: traslación retrógrada
En esta combinación, la melodía original es transportada para luego anotarse de manera retrógrada.
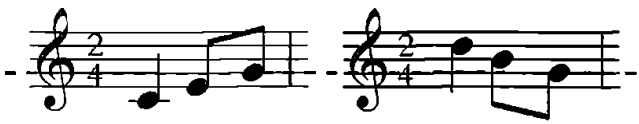


Melodía original | Transporte | Transporte con retrogradación

Traslación vertical más reflexión sobre un eje horizontal: transporte invertido
Para realizar esta combinación es necesario transportar la melodía a una nueva nota inicial y anotar luego su inversión. Sin embargo, estas dos operaciones pueden reducirse a una sola eligiendo convenientemente el eje de simetría.



Melodía original | Transporte a una 5ª | Transporte invertido

El ejemplo muestra una traslación vertical unida a una reflexión horizontal, con el eje en si.

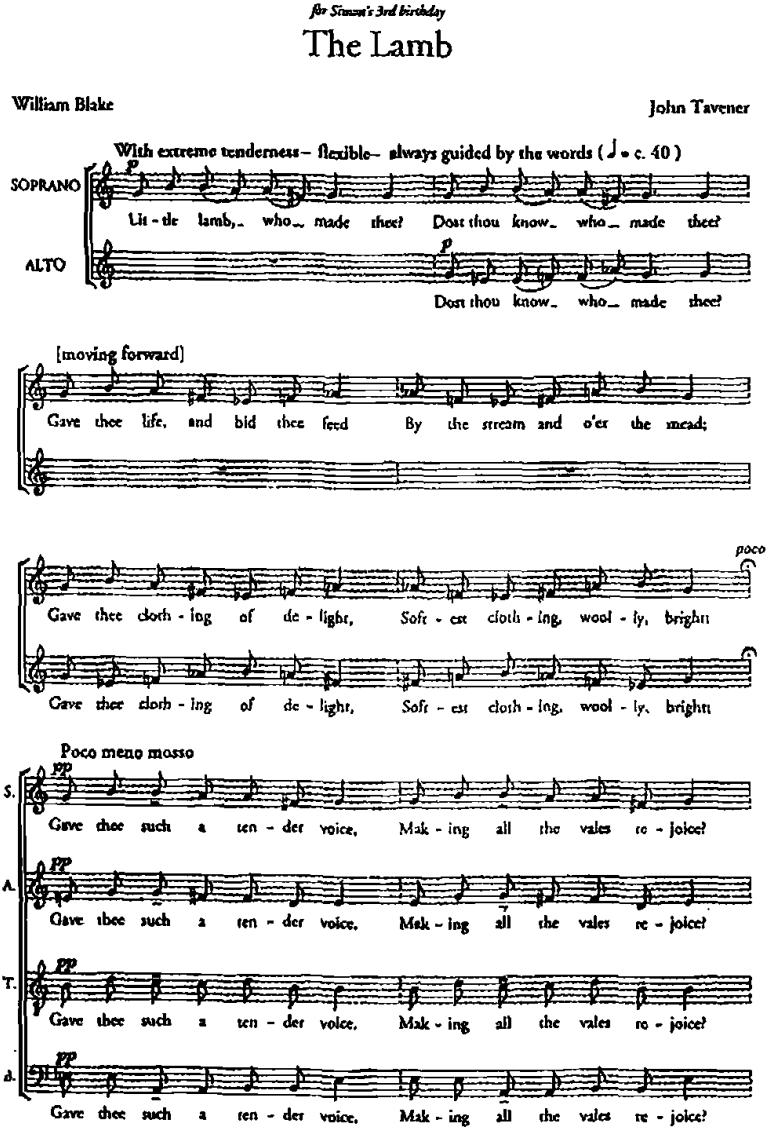


Melodía original | Inversión

El mismo resultado anterior, pero aplicando sólo una reflexión con respecto a un eje en la nota sol.

La obra *The Lamb* del compositor inglés contemporáneo John Tavener combina algunas de las transformaciones explicadas en una bella obra coral que compuso para su sobrino de tres años. Musicalmente es un juego de simetrías: en el primer compás se presenta una melodía que se repite en el segundo (traslación), pero en esta ocasión acompañada por una segunda voz que no es otra cosa que una inversión (simetría sobre un eje horizontal) de la original; el eje de simetría lo ubica en

la nota *sol*. En el tercer compás se presenta una nueva melodía que se completa en el cuarto compás con una versión retrógrada (simetría sobre un eje vertical) de ella misma; en los compases 5 y 6 se repite la melodía de los compases 3 y 4, pero con el agregado de una segunda voz, versión simétrica (simetría horizontal) de ella misma. Por lo tanto, la melodía del compás 6 de la segunda voz es una rotación de 180 ° de la original del compás 4 de la primera voz.
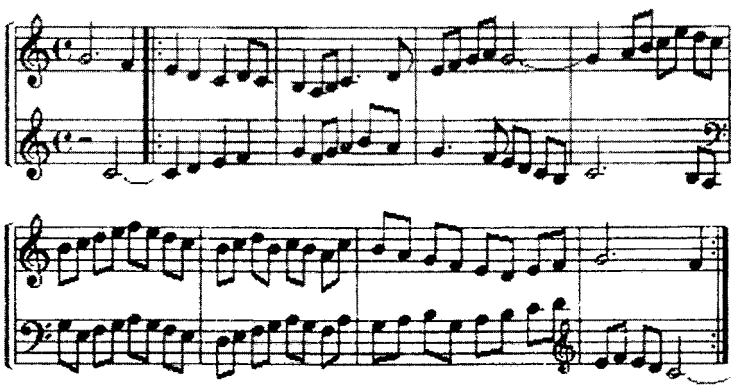


Si bien se respetan estrictamente los intervalos entre cada par de notas de la melodía, por razones estéticas el compositor modifica la duración de la última nota de cada frase. El efecto de simetría, no obstante, no se pierde, debido a que la línea melódica se construye en la mente como un dibujo que resulta de la unión de los ataques de los sonidos, independientemente del sostenimiento y caída de las notas.

EL SELLO DE BACH
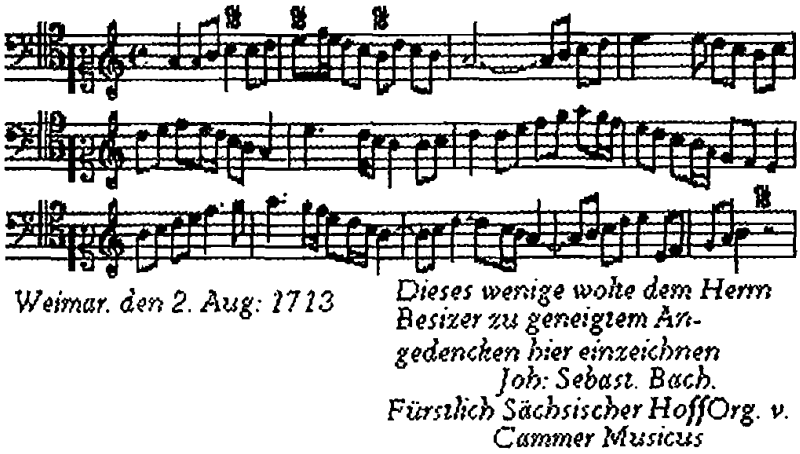
Johann Sebastian Bach diseñó su propio sello personal, perfectamente simétrico. Se trata de un juego simbólico visual, formado por tres elementos fundamentales: la corona, que representa a Dios; las tres iniciales de su nombre, JSB, que aparecen en posición normal, y su imagen especular; por último, combinando la J de una simetría son la S de la otra, se forma la letra griega χ, que representa la cruz, y es la inicial de «Cristo» en griego. Esto se da en las dos simetrías y por tercera vez combinando las dos S.
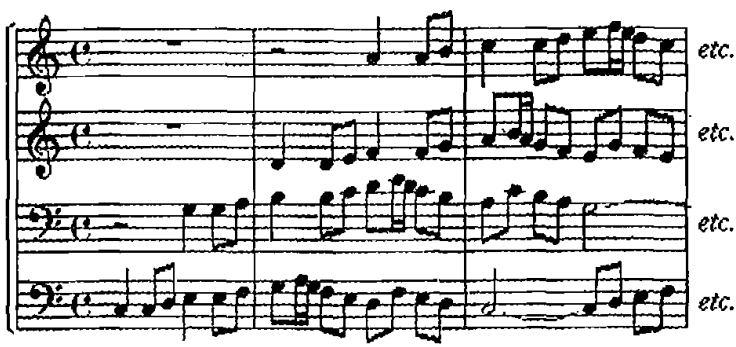


En el *Canon Concordia Discors*, BWV 1086 de Bach la imitación es una inversión con eje de simetría en la línea *mi*. Si quisiéramos «clasificar» esta obra, diríamos que estamos frente a un caso de reflexión sobre un eje horizontal combinada con traslación (canon).



Otra particularidad de algunas de las creaciones de Bach es la expresión críptica del planteo, que obliga a descifrar las consignas para poder desarrollar el canon. En la pieza con número de catálogo BWV 1073, el compositor anotó una única melodía en el pentagrama, pero estableció no una, sino cuatro claves. Cada una otorga un valor distinto a las notas del pentagrama, de modo que la melodía se resignifica para cada clave. Siguiendo el orden en que se presentan las claves, la melodía se inicia en un *do*, luego en un *sol*, luego en un *re* y por último en un *la*. Estas notas se corresponden con las cuatro cuerdas al aire de una viola, uno de los instrumentos preferidos de Bach.

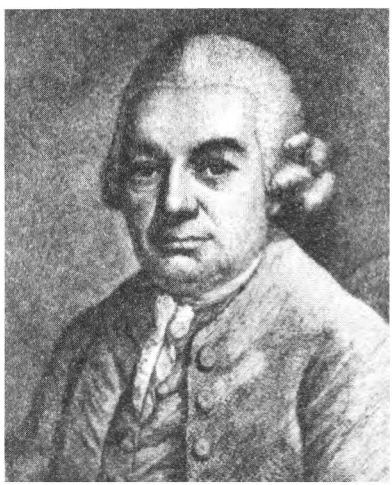


Traducidas las melodías a las claves habituales de *sol* y *fa*, y respetando las sucesivas entradas indicadas por el autor, se puede organizar una partitura con el desarrollo completo del canon.

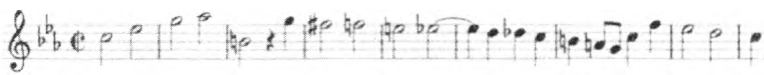


EL TEMA DEL REY

En 1740, Carl Philipp Emanuel Bach (1714-1788), quinto hijo de Johann Sebastian, accedió a la corte de Federico II el Grande, monarca de Prusia, en cuyo palacio se ofrecían diariamente conciertos de cámara. El rey, melómano, flautista y también compositor, tuvo noticias del arte del viejo Bach y quiso conocerlo. Tras mucho insistir, su hijo Carl logró que aceptara la invitación. Durante su estancia en Postdam, sede del palacio, y a solicitud del rey, Bach probó todos los pianofortes Silbermann que el monarca tenía distribuidos por las habitaciones y salones. Demostrando su capacidad creadora, durante el recorrido Bach pidió al rey, de forma totalmente improvisada, una melodía para desarrollar una fuga. Bach partió hacia Leipzig, y en agradecimiento a la atención recibida compuso la *Ofrenda musical* basándose en la melodía entregada por Federico II. La obra, en la que Bach desarrolla maravillosamente su arte, fue completada dos meses después del encuentro y consta de dos ricercares, diez cánones y una sonata. En el manuscrito, Bach anotó como título del primer ricercar «Regis Iussu Cantio Et Reliqua Canonica Arte Resoluta», que significa «tema elaborado por el rey, y el resto desarrollado según el arte del canon». La frase esconde un juego de palabras, un acróstico: si encolumnamos las palabras de la frase, con las iniciales se forma una palabra en vertical, en este caso, justamente RICERCAR.



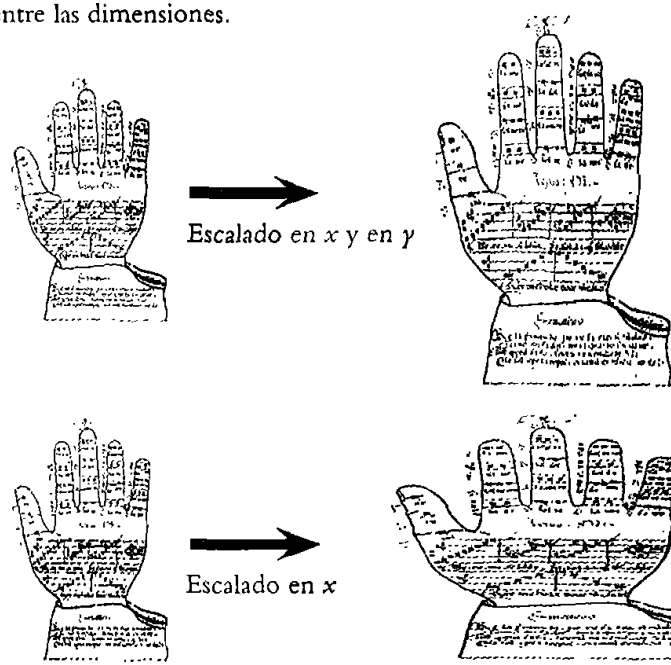
Retrato de Carl Philipp Emanuel Bach y, abajo, el tema del rey Federico II el Grande



Transformaciones escalares
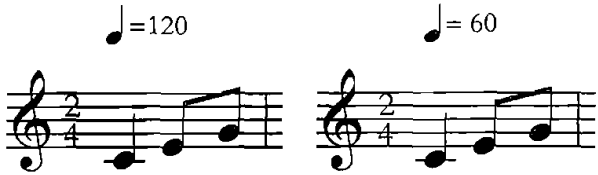
Los tres tipos de simetrías vistos hasta el momento (traslación, reflexión y rotación) comparten la característica de ser «isométricas», en tanto conservan los tamaños y las distancias originales que mantenían entre sí los elementos musicales.

Hay también una transformación no isométrica que tiene su correlato musical: el «escalado». Éste aumenta o disminuye la medida de una figura en alguna de sus dimensiones. Según el modo en que se aplique el escalado, se mantendrá la proporción de la figura o se verá deformada. Al pasar al terreno musical, es necesario discriminar entre las dimensiones.
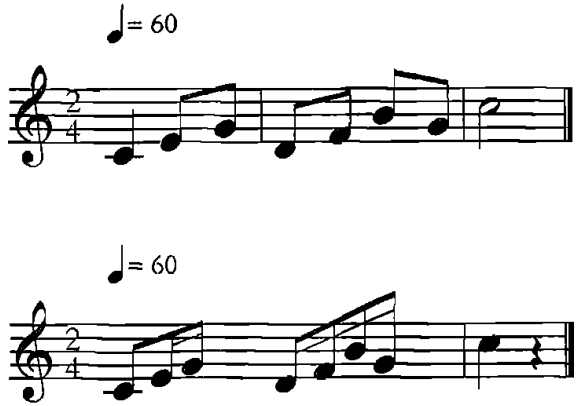


Escalar en lo horizontal

Los ejemplos más claros son los que aplican el escalado únicamente en el eje del tiempo. Un modo de modificar este escalado y, por ende, la velocidad de una obra, es cambiar la indicación metronómica:
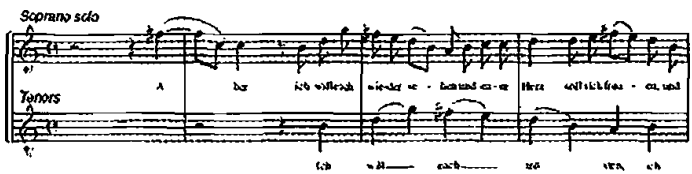


Cambio de velocidad por cambio de metrónomo.

Sin embargo, a menudo es más interesante modificar proporcionalmente la velocidad de la ejecución manteniendo el mismo pulso (la misma indicación metronómica). Para ello se cambian las figuras por sus equivalentes de mayor o menor duración:



El *Réquiem alemán* de Johannes Brahms

El compositor romántico alemán Johannes Brahms (1833-1897) utilizó el escalado en un pasaje de su conocido *Réquiem alemán*. Tras unos primeros compases en solitario, la soprano (la línea indicada como «soprano solo» en la partitura) desarrolla una melodía en corcheas, que los tenores repiten con un corrimiento de una corchea, pero duplicando las figuras: las corcheas son reemplazadas por negras, las negras por blancas, etcétera. El resultado es que la soprano canta la melodía al doble de velocidad que los tenores («tenors» en la partitura):

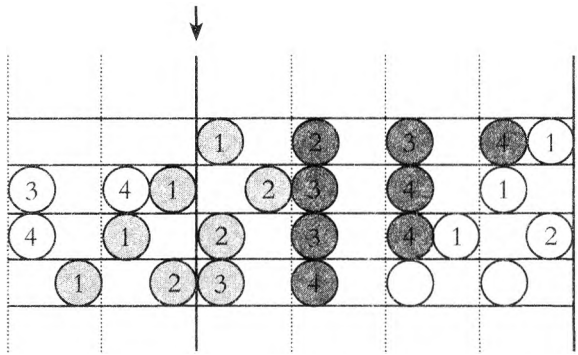


«Puttin' on the Ritz»

Esta conocida melodía es obra del estadounidense Irving Berlin (1888-1989), «el compositor de canciones ligeras más grande de todos los tiempos», en palabras de su compatriota George Gershwin. Publicada originalmente en 1929, más tarde fue grabada por Benny Goodman y Fred Astaire, entre otros. A pesar de tratarse de una composición de ambiciones estrictamente populares, la rítmica de sus estrofas es bastante enrevesada. La melodía repite cuatro veces una célula muy simple de cuatro notas, pero las cuatro repeticiones no ocupan cuatro compases, sino algo más de tres, logrando un efecto rítmico desconcertante:
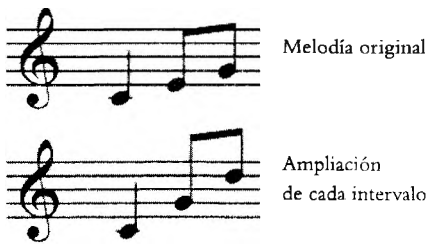


Berlin logró este atractivo efecto comprimiendo muy ingeniosamente algunas de sus notas, una u otra en cada caso. En el esquema siguiente se aprecia cómo cuatro notas, agrupadas en «células melódicas» y representadas por los círculos numerados del 1 al 4, se van adelantando una tras otra sutilmente con respecto a la marca del compás, indicada por la flecha.



Escalar en lo vertical

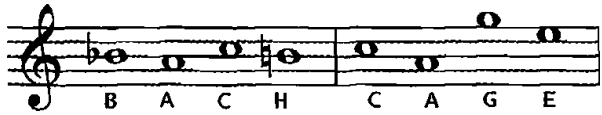
¿Qué sucede con la transformación escalar vertical? Ésta es la más extraña de todas, la menos factible y, musicalmente, la menos reconocible. En una transformación escalar vertical, todos los intervalos son ampliados proporcionalmente. En el primer ejemplo, los intervalos de la primera melodía son dos terceras; en el segundo, estas terceras se transforman en quintas.



El objetivo de repetir la curva melódica original pero expandida puede lograrse en ciertos casos, pero el resultado de esta transformación puede ser también una

parodia de la melodía original. Un caso notable de escalamiento vertical vincula a Bach con John Cage, y está citado en el clásico de la divulgación científica *Gödel, Escher, Bach: un eterno y grácil bucle*, del autor estadounidense Douglas Hofstadter.

Partiendo siempre de los nombres de las notas tal como las consignan los anglosajones, de la A a la G, es posible escalar el tema BACH para que resulte CAGE... o casi.



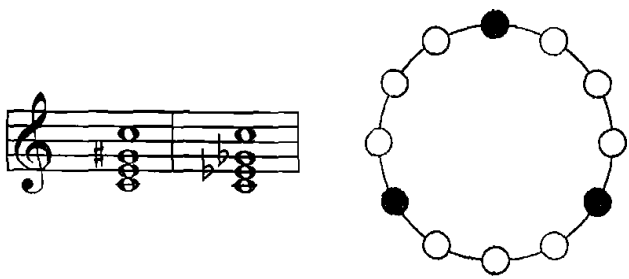
Los intervalos del tema BACH son: −1 | +3 | −1.

Multiplicando estos intervalos por 3, resulta −3 | +9 | −3, que casi coincide con CAGE, cuyos intervalos son −3 | +10 | −3.

Simetrías armónicas

Acordes simétricos

El espacio de una octava consta de 12 semitonos. Este espacio de 12 semitonos sólo puede repartirse simétricamente de dos formas posibles en acordes simétricos: uno de 3 notas a 4 semitonos de distancia entre sí, y otro de 4 notas a 3 semitonos de distancia entre sí.

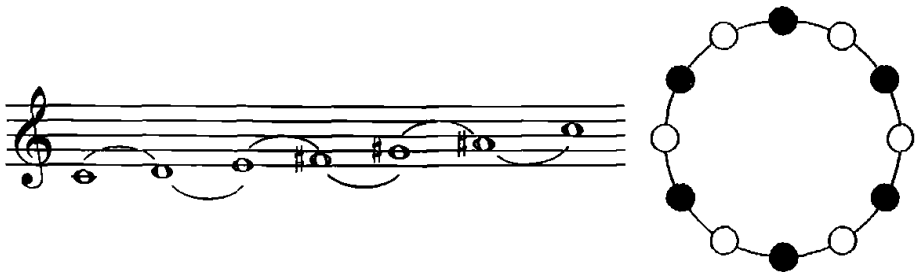


El primero es el acorde de «quinta aumentada», compuesto por dos terceras mayores. El segundo es el acorde de «séptima disminuida». La característica simétrica de este acorde en particular lo convirtió en uno de los grandes protagonistas de la historia de la música, ya que cualquier aparición suya puede ser «leída» de muchas maneras a la vez.

Escalas simétricas

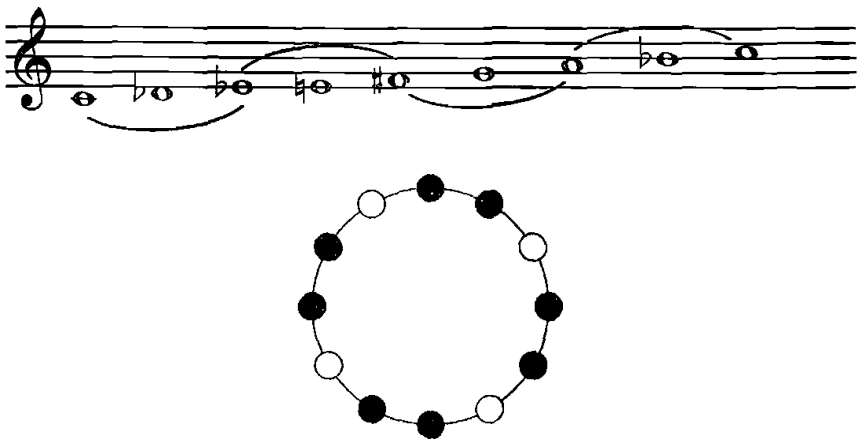
En su libro *Técnica de mi lenguaje musical*, el compositor francés Olivier Messiaen (1908-1992) se ocupó de clasificar una serie de escalas que denominó «modos de transposición limitada». Estas escalas completan la octava y distribuyen los intervalos que separan cada par de notas de manera simétrica. Se basan en el sistema cromático de doce sonidos, y están formadas por diferentes grupos simétricos. Una vez establecida la escala, se la transpone sucesivas veces, hasta que es imposible continuar. Esto ocurre cuando un nuevo transporte genera una escala que repite las notas del primer grupo.

La primera escala de la clasificación de Messiaen es la denominada «de tonos enteros»:

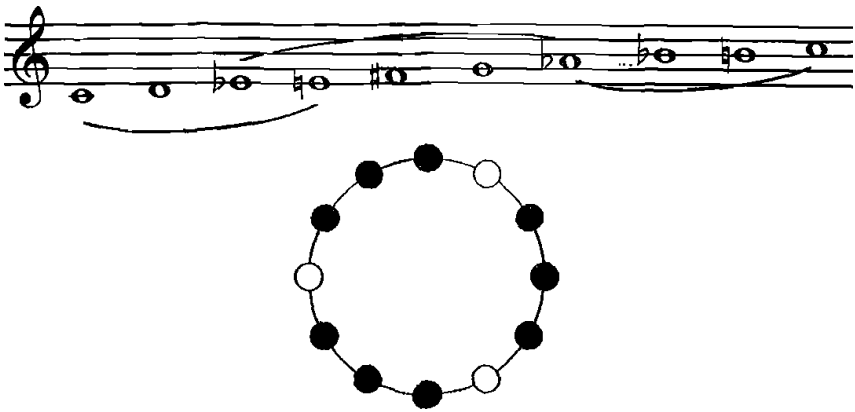


Esta escala sólo admite dos disposiciones, partiendo de *do* y de *do* sostenido. La que comienza en *re*, repite las notas de la escala inicial.

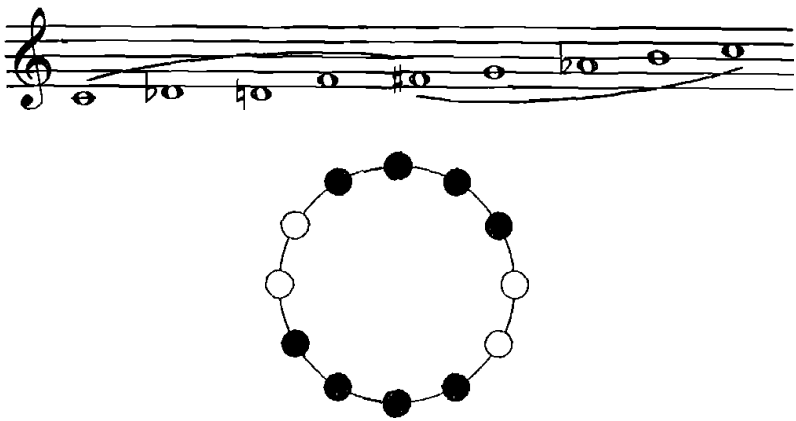
La segunda escala es la escala octatónica disminuida, que encadena alternadamente semitonos y tonos enteros. Se divide en cuatro grupos de tres notas y acepta tres transposiciones.



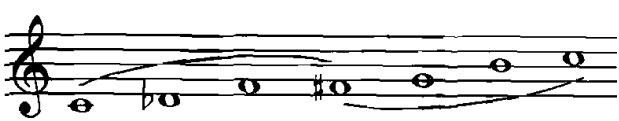
La tercera escala ordena grupos de tono-semitono-semitono y forma tres grupos de cuatro sonidos. Acepta cuatro transposiciones.

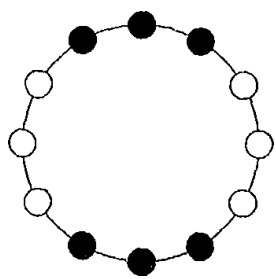


La cuarta escala ordena: semitono-semitono-tono y medio (3 semitonos)-semitono. Forma dos grupos y acepta seis transposiciones.

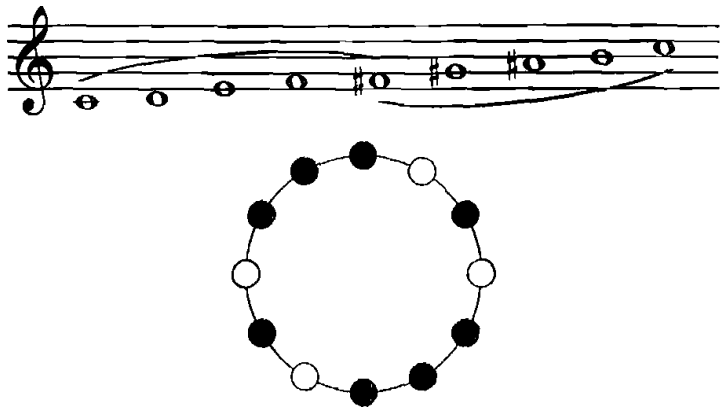


La quinta escala forma dos grupos simétricos (semitono-2 tonos-semitono de cuatro sonidos). Acepta seis transposiciones.

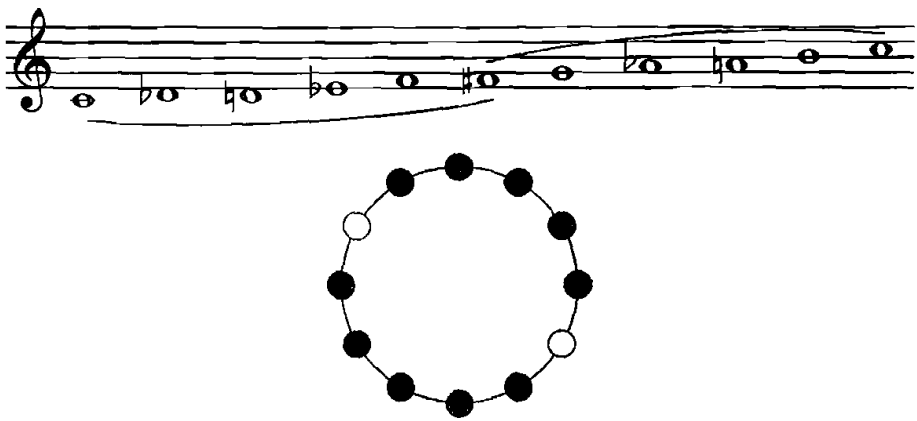




La sexta escala forma dos grupos de cinco sonidos (tono-tono-semitono-semitono) y tiene seis transposiciones.



La séptima escala tiene dos grupos de seis sonidos (semitono-semitono-semitono-tono-semitono) y tiene seis transposiciones.



La matemática de la forma musical

La simetría no sólo se aprecia en el diseño de frases y motivos melódicos, sino que en estructuras formales más complejas también pueden observarse, desde una óptica matemática, diseños interesantes en la organización de sus partes.

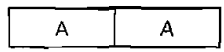
El análisis formal de una obra musical estudia el «plano de la obra», esto es, las partes que la componen, y las conexiones que existen entre ellas. Dado que

todo plano puede mostrarse con diferentes grados de aproximación, en función de la «escala» que se emplee se obtendrá una vista general, con la consiguiente pérdida de los detalles, o bien la mirada se centrará en estos últimos, disipándose la visión general.

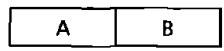
ABCDE...

Comencemos con una vista lejana: se observan las grandes estructuras, que nombraremos con letras mayúsculas.

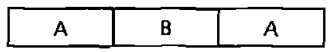
Aquello que define las partes de la forma en el contexto de un discurso ordenado es la reiteración o el cambio. Una obra con una sola sección que se repite íntegramente será:



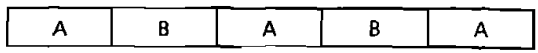
lo que ya es una simetría sencilla. Una obra con dos secciones completamente diferentes, en cambio, no ofrece simetría alguna:



¿Existen obras formalmente simétricas? La respuesta es «sí». Es más, se trata de una forma muy frecuente. Un ejemplo es el *scherzo* («juego» o «divertimento»), una forma musical que suele formar parte de alguna obra mayor, como una sinfonía (por ejemplo, el segundo movimiento de la *Novena* de Beethoven, o el tercero de la *Cuarta* de Chaikovski). En esencia, el *scherzo* es binario, de la forma AB. Ocurre que, tras realizar la segunda parte, se repite la primera, convirtiéndose la forma en ternaria:



Ésta es, naturalmente, la forma simétrica más simple. La repetición puede reiterarse, generando así más formas simétricas:



Existen, además, formas ternarias compuestas, cada una de cuyas partes está integrada por formas ternarias. Esto da como resultado estructuras simétricas mayores:

A	B	A
aba	cdc	aba

Ciertas piezas breves, como el *Vals* op. 34 n° 1 de Frédéric Chopin (1810-1849), incluyen simetrías aun más extensas en parte de su estructura:

A	B	C	D	C	B	A

A medida que se estructuran obras más extensas, la posibilidad de apreciar que la segunda parte es retrógrada se va diluyendo. La *Ofrenda musical* de Bach presenta una simetría formal del siguiente tipo:

RICERCAR	CÁNONES	TRÍO SONATA	CÁNONES	RICERCAR

La *Misa en Si menor* de Bach

En varias de sus obras, Bach, el compositor formalmente más inventivo de la historia, presenta estructuras con particularidades simbólicas y matemáticas. Su *Misa en Si menor* (o *Gran Misa*) BWV 232, está conformada por 27 números, agrupados en cuatro partes: «Kyrie», «Gloria», «Credo» y una cuarta que agrupa a su vez las subpartes «Sanctus», «Hosanna», «Benedictus» y «Agnus Dei». La idea del compositor alemán era simbolizar la Santísima Trinidad tanto en la forma musical como en la numérica.

El número 3 representa la Santísima Trinidad. Tanto el total de números de la obra (27) como cada una de las distribuciones en las cuatro partes (3 + 9 + 9 + 6) es divisible entre tres. En especial, los dos números centrales («Gloria» y «Credo») tienen una estructura simétrica. «Gloria» tiene el centro de simetría en la sección «Domine Deus» («Dios, Señor nuestro»). «Credo» lo tiene en el «Crucifixus» («La Crucifixión»):

—Kyrie
Kyrie eleison (1°).
Christe eleison.
Kyrie eleison (2°).

—Gloria
Gloria in excelsis.
Et in terra pax.
Laudamus te.
Gratias agimus tibi.
Domine Deus. ←
Qui tollis peccata mundi.
Qui sedes ad dexteram Patris.
Quoniam tu solus sanctus.
Cum Sancto Spiritu.

—Credo
Credo in unum Deum.
Patrem omnipotentem.
Et in unum Dominum.
Et incarnatus est.
Crucifixus. ←
Et resurrexit.
Et in Spiritum Sanctum.
Confiteor.
Et expecto.

—Sanctus, Hosanna, Benedictus, y Agnus Dei
Sanctus.
Hosanna.
Benedictus. Aria
Hosanna (da capo).
Agnus Dei.
Dona nobis pacem.

En el «Credo» en particular, los tres elementos centrales resumen la vida de Cristo, desde que fue engendrado *(Et incarnatus est)* hasta la resurrección *(Et resurrexit)*, con la crucifixión *(Crucifixus)* como movimiento central.

CRIPTOGRAMAS MUSICALES

Un criptograma es un mensaje que se vuelve incomprensible para quien no conoce la clave. El mensaje puede estar escondido en un dibujo, en un texto o mezclar números y letras; en todos los casos hay una resignificación de un código conocido. Un criptograma musical es una pieza que permite descifrar un texto simplemente nombrando las notas que se oyen. Con este sistema, muchos compositores han construido motivos melódicos. El más famoso es, sin duda, B-A-C-H, que utiliza la nomenclatura alemana clásica, en la que el *si bemol* corresponde a la letra B; el *la*, a la A; el *do*, a la C, y el *si*, a la H.
Otros motivos famosos son:

– ABEGG: en homenaje a Meta Abegg, en las *Variaciones Abegg,* de Robert Schumann.
– CAGE: por John Cage, utilizado por Paulin Oliveros.
– GADE: por Niels Gade, utilizado por Robert Schumann.

Anton Webern, en la serie que vimos de su *Cuarteto de cuerdas* op. 28, selecciona las cuatro notas BACH, y con dos transformaciones geométricas de ese grupo construye las otras ocho notas.
Por su parte, el austriaco Alban Berg (1885-1935), en su ópera *Wozzeck*, hizo un homenaje a los tres representantes principales de la escuela vienesa, diseñando un motivo criptográfico para cada instrumento:

– El piano: Arnold Schönberg (ADSCHBEG).
– El violín: Anton Webern (AEBE).
– La trompeta: Alban Berg (ABABEG).

El número de oro y la música

El italiano Leonardo de Pisa, más conocido como Fibonacci (h. 1170-1250) fue uno de los introductores en Occidente de la notación numérica arábiga. En su obra *Liber Abaci* dio a conocer el siguiente problema:

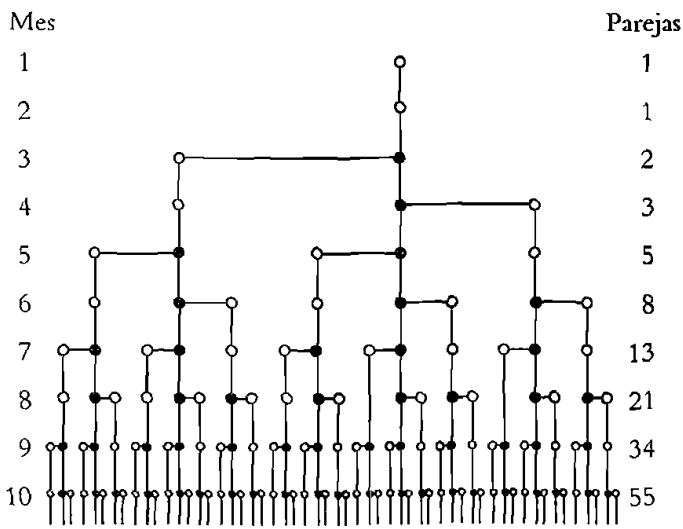
«A partir de su segundo mes de vida, una pareja de conejos (un macho y una hembra) engendra una nueva pareja cada mes, que nace al mes siguiente. Al cabo de un año, ¿cuántas parejas de conejos habrá?».

La solución de esta intrigante cuestión es la siguiente:

- Los dos primeros meses sólo hay una pareja A de conejos.
- Al tercer mes, nace B, la primera pareja descendiente de A.
- Al cuarto mes, nace C, la segunda pareja descendiente de A.
- Al quinto mes, nacen D, la tercera pareja descendiente de A, y E, la primera pareja descendiente de B.

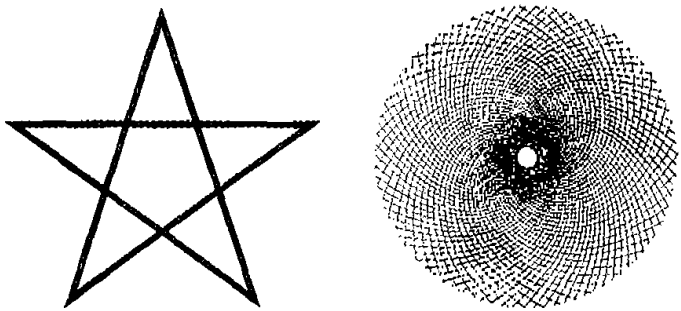
En los sucesivos meses, la cantidad de parejas de conejos es: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144... Esta serie de números es conocida como «sucesión de Fibonacci». Si hacemos los cocientes de los términos vecinos de esta sucesión nos encontraremos con los siguientes valores:

$$1/1 = 1$$
$$2/1 = 2$$
$$3/2 = 1{,}5$$
$$5/3 = 1{,}666...$$
$$8/5 = 1{,}6$$
$$13/8 = 1{,}625$$
$$21/13 = 1{,}615...$$
$$34/21 = 1{,}619...$$



Esquema en el que se expone la evolución de la sucesión de crecimiento de la raza de conejos. Los puntos blancos indican que las parejas de conejos son jóvenes, y los negros, que son adultas y capaces de procrear.

El límite de esta sucesión de cocientes no es otro que 1,618033989..., el conocido como «número de oro», «proporción divina» o «sección áurea», y desde antiguo se lo asocia con la armonía y la belleza. Los términos de la sucesión de Fibonacci emergen en muchos y diversos ámbitos de la naturaleza, como en el número de hileras de pepitas de los girasoles, en el ángulo en que las hojas de algunas plantas se dan en el tallo a diferentes alturas, en la espiral de las conchas de los gasterópodos...



La estrella de cinco puntas, o «pentagrama», de fuerte presencia simbólica en muchas culturas, tiene todos sus segmentos en relación áurea. A la derecha, esquema de la disposición de las semillas del girasol, con 55 espirales en sentido dextrorso y 89 en sentido sinistrorso.

La música no ha resultado ajena al atractivo de la proporción áurea. Algunas composiciones de Mozart y de Beethoven parecen alcanzar su clímax, el momento de máxima tensión, en un punto que divide la obra en secciones cuyas extensiones estaban aproximadamente en proporción áurea. Lo más probable es que ambos genios llegaran a este resultado de manera intuitiva, buscando el equilibrio formal de su música. En el caso de Bartók, no obstante, la aparición en su obra de números de Fibonacci es tan ostensible que resulta improbable que no hiciera uso de ellos de manera consciente. Así, la fuga inicial de su *Música para cuerdas, percusión y celesta* tiene sus (casi) 89 compases divididos en secciones de 55 y 34. Estas secciones, a su vez, vuelven a estar subdivididas siguiendo los números de Fibonacci: la primera en 34 y 21 compases, y la segunda, en 13 y 21. El tercer movimiento de la misma obra, un adagio, comienza con una progresión rítmica en la que el xilófono toca un mismo *fa* en grupos de 1, 1, 2, 3, 5, 8, 5, 3, 2, 1 y 1. Su *Cuarteto para cuerdas nº 4* tiene en sus cinco movimientos un total de 2.584 pulsos, el 18° número de la sucesión de Fibonacci.

Los números de Fibonacci también parecen encontrarse detrás de ciertos modelos interválicos usados por Bartók, que incluían intervalos compuestos por 2, 3, 5, 8 y 13 semitonos.

Asimismo, algunas obras de Debussy parecen estar organizadas según la sección áurea o siguiendo los números de Fibonacci. La introducción del «Dialogue du vent et la mer», de la obra orquestal *La Mer*, tiene 55 compases que se subdividen en secciones de 21, 8, 8, 5 y 13 compases de longitud. El «áureo» compás 34 está marcado por un golpe de trombones.

Aunque muchos de estos análisis puedan tener algún grado de aproximación con la realidad, conviene tomarlos con ciertas reservas. Hay en ellos algo de profecía autocumplida: no es raro que un oyente «advertido» de antemano de la (eventual) presencia de proporciones áureas se sienta un tanto condicionado en su escucha.

LA MEDIDA DE LA BELLEZA

En el proceso creativo, el artista elabora la forma: lo pequeño y lo general, buscando tensiones y relajamientos; aristas y curvas; agudos y graves. El resultado es un estado de equilibrio, estable o inestable. El placer estético que el producto artístico pueda generar en el observador es, en último término, una cuestión subjetiva. Ahora bien, ¿hay algún modo de, al menos, aproximar un criterio objetivo de belleza? El número de oro es tal vez el más conocido de los baremos objetivos relacionados con la belleza de un objeto, pero ha habido otros intentos. El matemático estadounidense George Birkhoff (1884-1944) así lo pensaba. Tras un trabajo de campo estudiando distintas manifestaciones artísticas, publicó a principios de la década de 1930 *A Mathematical Theory of Aesthetics (Una teoría matemática de la estética)* y *Aesthetic Measure (Medida estética)*. Los estudios de Birkhoff se centraron en las artes plásticas, la música y la poesía. Definió un factor bautizado como «medida estética» que pondera dos factores: el «orden estético» (O) y la «complejidad» (C):

$$M=\frac{O}{C}.$$

El orden estético viene dado por la regularidad de los elementos que conforman el objeto de estudio, mientras que la complejidad mide la mayor o menor presencia de dichos elementos. Birkhoff fue el primero en reconocer que para obtener resultados representativos no podía estudiarse la obra en su conjunto, sino alguna característica del objeto estudiado: en el caso de la música, por ejemplo, los acordes aislados del ritmo y el contexto armónico. Birkhoff dedicó tres capítulos del libro a la música, en los que analizó los acordes, la armonía, la melodía y el contrapunto. Con independencia de la efectividad del sistema, es interesante observar que la ecuación postula que la belleza es mayor cuando decrece la complejidad, es decir, que hay una relación directa entre belleza y simplicidad.

Capítulo 4

Ondas y bits

La música es la aritmética de los sonidos,
como la óptica es la geometría de la luz.
Claude Debussy

Nos proponemos ahora afinar el oído a las distintas cualidades del sonido y al modo en que sus distintas hebras se relacionan, adentrándonos en las profundidades de la naturaleza Esta aproximación al sonido, ya no sumado a un hecho artístico, sino como fenómeno físico, nos obliga a acudir a las herramientas matemáticas para intentar descifrarlo y comprenderlo.

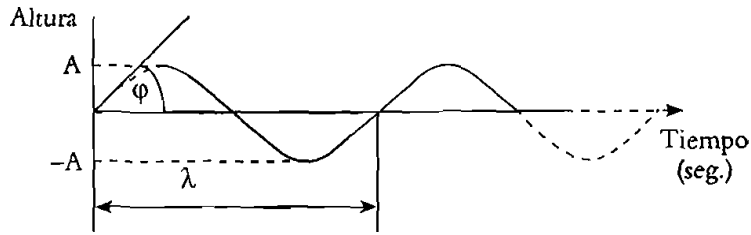
Nos sumergiremos asimismo en el microcosmos y en los torrentes de electrones de los circuitos electrónicos para conocer cómo se mueve la información sonora cuando no se trata de sonido.

La física del sonido

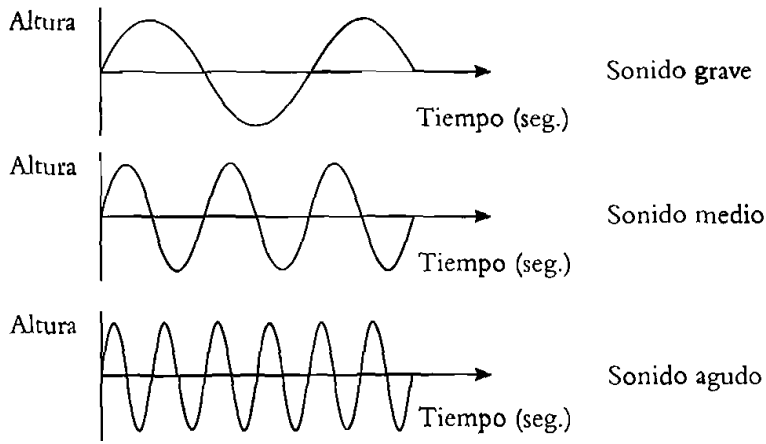
Gracias a nuestra percepción, hemos atendido a una cualidad del sonido que denominamos altura o tono, asociada a las frecuencias de vibración. Un sonido es generado por el movimiento oscilatorio de algún cuerpo sólido, sea de metal, madera, cuero, o bien las cuerdas vocales, o algún fluido como aire o agua. Una vez emitida, esta vibración se propaga hacia las partículas vecinas.

Sea cual fuere la fuente generadora del sonido, la onda se propagará en última instancia al aire, y así podrá llegar a nuestros oídos. El efecto de propagación de la onda se manifiesta en compresiones y expansiones de las partículas del aire, que es precisamente lo que los oídos perciben como sonido. Se trata de una oscilación de estados de presión, esto es, una onda.Cuando el vaivén de la vibración es uniforme se dice que la oscilación es «armónica». La velocidad con que tiene lugar esta fluctuación entre los dos estados se denomina «frecuencia», medida en cantidad de oscilaciones por segundo (hercios). Cuanto mayor es la frecuencia, mayor es la altura del sonido percibido.

Una oscilación sonora parte de una situación de reposo y va creciendo gradualmente hasta alcanzar su máxima elongación (A), momento en el que comienza a acercarse al estado de reposo, para desde allí comenzar la oscilación en la dirección contraria hasta una nueva elongación máxima (–A). Al regresar al punto de reposo habrá cumplido un ciclo completo (λ). En este punto la pendiente de la curva es la misma que en el punto inicial. Matemáticamente, la oscilación sonora pura se representa con la función seno:



Cada una de las variables de esta función se asocia a alguna de las cualidades del sonido, a saber: altura, intensidad y timbre. La «altura» viene dada por la frecuencia de oscilación, de modo que a una baja frecuencia de oscilación le corresponden tonos graves, y a una alta frecuencia de oscilación, tonos agudos.

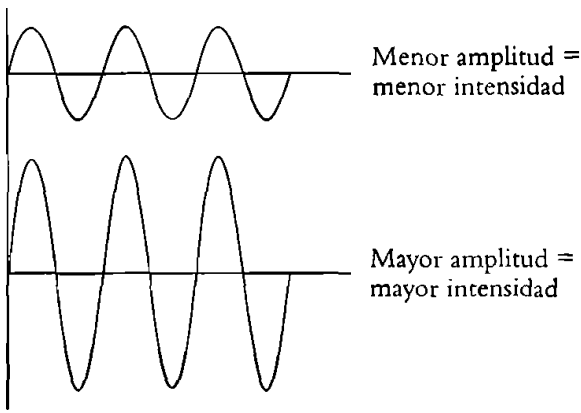


La altura del sonido es proporcional a la frecuencia.

El espectro de frecuencias que el oído humano puede detectar varía según cada persona y en función de la edad, pero en general abarca un total de once octavas:

1ª octava:	16-32 Hz
2ª octava:	32-64 Hz
3ª octava:	64-125 Hz
4ª octava:	125-250 Hz
5ª octava:	250-500 Hz
6ª octava:	500-1.000 Hz
7ª octava:	1.000-2.000 Hz
8ª octava:	2.000-4.000 Hz
9ª octava:	4.000-8.000 Hz
10ª octava:	8.000-16.000 Hz
11ª octava:	16.000-32.000 Hz

La «intensidad», es decir, la energía acústica que desarrolla una onda longitudinal por unidad de tiempo, depende de la amplitud de ésta: a mayor volumen, mayor amplitud de la onda. Es interesante mencionar que el umbral de audición se da para una presión de intensidad acústica de 2×10^{-4} bar, en tanto que la tolerancia máxima, es decir, el umbral del dolor, se sitúa en torno a los 200 bar.



La intensidad del sonido es proporcional a la amplitud.

La unidad de medida de la potencia acústica es el belio, aunque en la práctica se utiliza el decibelio (dB), que es la décima parte de un belio. En su diseño se tuvo en cuenta que la sensibilidad del oído humano frente a la intensidad sigue una escala aproximadamente logarítmica, es decir, que para intensidades relativamente altas, el oído humano experimenta un creciente grado de rechazo. La escala de intensidad parte de los 0 dB, el umbral de audición, y alcanza hasta los 120 o 140 dB, donde se

sitúa el umbral del dolor. En la siguiente tabla se ofrecen algunos ejemplos de actividades que generan ruido y su aproximación a la intensidad del mismo:

Intensidad del sonido	
120-140 dB	Umbral del dolor
120 dB	Motor de avión en marcha
100 dB	Una orquesta sonando
90 dB	Avenida ruidosa, muy transitada
80 dB	Ferrocarril
70 dB	Orquesta de metales
50 dB	Orquesta de cuerdas
40 dB	Conversación
20 dB	Sala de lectura
10 dB	Respiración tranquila
0 dB	Umbral de la audición

ONDAS EN 3D

Es interesante distinguir los diferentes tipos de ondas para poder comprender más claramente el fenómeno sonoro. Hay ondas unidimensionales, que transportan sus pulsos en una línea recta. Otras se transmiten en una superficie y son bidimensionales, como las que provoca una piedra al caer al agua; su frente de avance son circunferencias concéntricas, con centro en el foco generador del sonido. Las ondas sonoras pertenecen a un tercer grupo, el de las ondas tridimensionales; en este caso, el frente de onda son superficies esféricas. Si bien la ecuación que representa las ondas sonoras es una curva sinusoidal, el fenómeno tiene lugar en el espacio tridimensional. La intensidad sonora es la potencia ejercida por unidad de superficie. Por tratarse de una serie de esferas concéntricas, la intensidad se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$I = \frac{P}{S},$$

siendo I la intensidad, P la potencia y S la superficie. Dado que $S = 4 \times \pi \times r^2$, la intensidad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

Finalmente, el «timbre» otorga «personalidad» al sonido: es la cualidad que, por ejemplo, permite identificar la voz de una persona determinada. El timbre también permite discriminar sonidos emitidos por instrumentos diferentes, aunque éste tenga la misma intensidad y la misma altura. Pero ¿cuál es la realidad física del timbre? Para responder a esta pregunta es necesario estudiar más a fondo la naturaleza de los sonidos.

Tono puro y tono real

La gráfica sinusoidal representa la oscilación de un sonido puro, algo no muy habitual en el mundo real. Algunos sonidos puros son, por ejemplo, el que genera un diapasón, el silbido o el producido al frotar el borde de una copa de cristal con el dedo humedecido.

Sonido puro

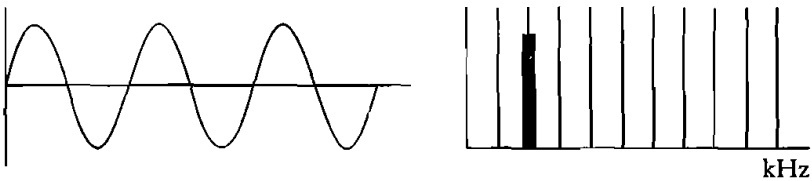


Gráfico de onda | Espectro de frecuencias

Pero al tañer la cuerda de una guitarra, o una campana, o al soplar el tubo de una flauta, se genera un sonido complejo, formado por una vibración principal a la que acompaña un conjunto de ondas de menor intensidad y de mayor frecuencia. Estas ondas asociadas se denominan hipertonos o «armónicos». Todo sonido no puro es, en definitiva, un conjunto de sonidos simultáneos. Para analizar de manera individual los armónicos de un sonido cualquiera, resulta básica la aportación del matemático francés Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), quien demostró que toda onda periódica no sinusoidal puede ser descompuesta en una serie de ondas sinusoidales.

Sonido no puro

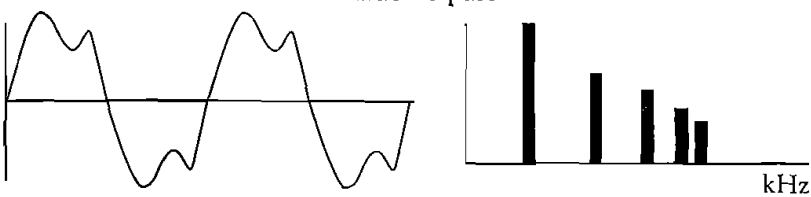
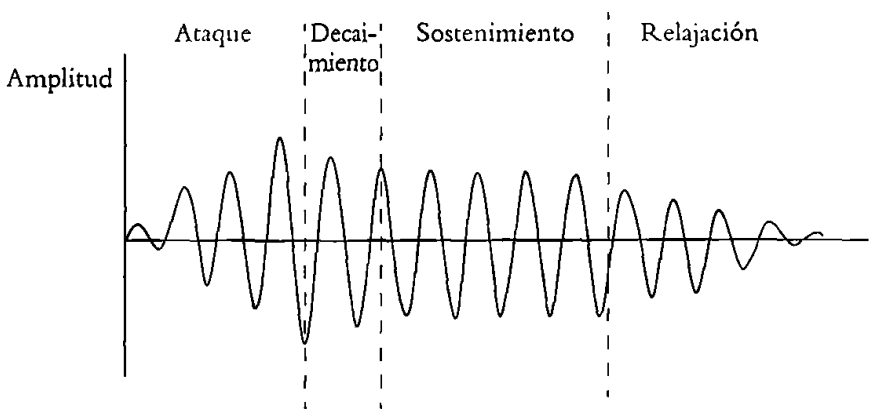


Gráfico de onda | Espectro de armónicos

En el caso de un sonido es posible discriminar el conjunto sonoro en una onda para cada armónico y otra para el sonido fundamental. Este aparente caos responde en realidad a un sistema sumamente ordenado. Por efecto de la misma naturaleza del material generado, el medio circundante, sus resonadores, etc., el tono fundamental genera sus armónicos, cuyas frecuencias se relacionan proporcionalmente con él. Para su estudio y evaluación se ordenan y numeran estos hipertonos según sus frecuencias crecientes. En líneas generales puede decirse que a mayor frecuencia, menor intensidad; sin embargo, la intensidad de los armónicos se ve modificada por una multitud de factores, entre los que se cuentan la geometría del cuerpo sonoro, la de la cavidad de resonancia, el material del que está construido, y muchas otras. Esta variedad de condiciones genera la intensificación de determinados armónicos y la atenuación de otros. De este modo, la diversidad de combinaciones da origen a una enorme cantidad de timbre, que a su vez confiere personalidad a los sonidos.

El sonido real emitido por un instrumento presenta cuatro características que se relacionan con el desarrollo temporal de la emisión:

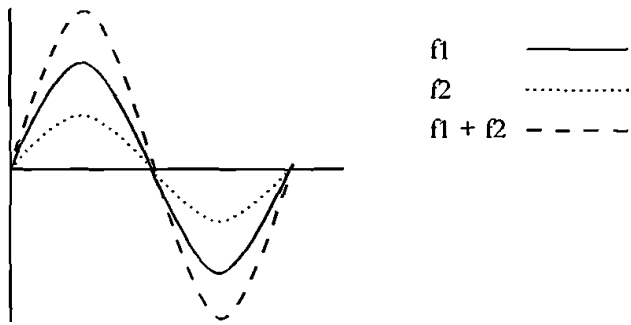
- El «ataque», esto es, el tiempo que transcurre entre que el instrumento es ejecutado y el momento en que el sonido alcanza su máxima amplitud.
- El «decaimiento», el tiempo que transcurre entre el punto de máxima amplitud y el instante en que se estabiliza la emisión.
- El «sostenimiento», el tiempo en que el sonido mantiene su amplitud mientras continúa la emisión.
- La «relajación», el tiempo que tarda en caer la amplitud al suspenderse la emisión.



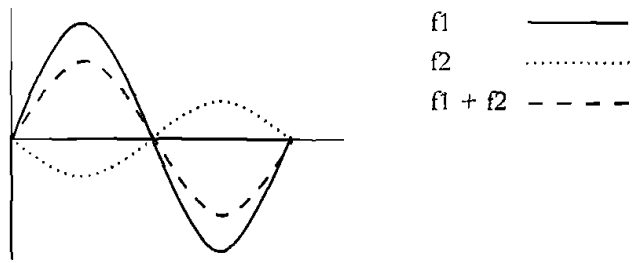
Momentos de una emisión sonora de frecuencia constante.

Superposición de ondas

Al representar la onda de un sonido real, se observa una curva que será la superposición de las ondas individuales: la fundamental y sus armónicos. Veamos un caso sencillo de superposición de ondas: consideremos dos sonidos de igual frecuencia, pero de diferente amplitud. Si las fases coinciden, el resultado es una ampliación del sonido:



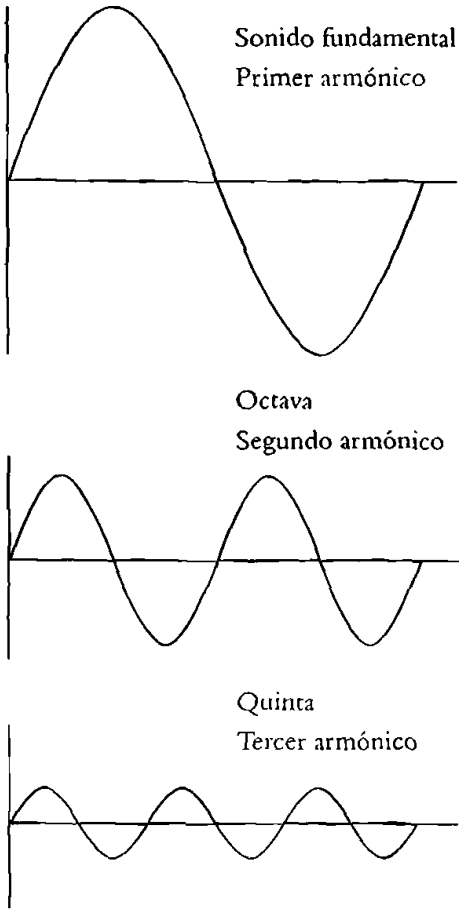
Por el contrario, si las curvas se encuentran desfasadas, se produce una disminución del sonido:

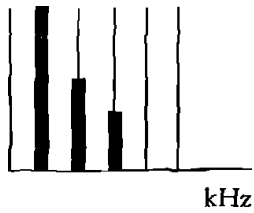


¿De qué modo se manifiesta esta peculiaridad en la práctica? Sin ir más lejos, la respuesta se encuentra presente en las salas de los conciertos: el volumen que es capaz de lograr un coro numeroso o una orquesta de cuerdas es notablemente superior al que desarrolla un grupo vocal de cuatro u ocho cantantes, o un cuarteto de cuerdas, respectivamente.

Para casos más complejos, como el de un sonido real producido por un instrumento musical, se obtendrá una gráfica no sinusoidal, por la presencia simultánea de

numerosas ondas parciales. Gracias al principio de Fourier, al tratarse de ondas periódicas es posible determinar la frecuencia de cada una de ellas.





La función de los armónicos

Los armónicos que son potencia de 2 (2, 4, 8...) se corresponden con octavas del sonido fundamental; su presencia en el conjunto sonoro refuerza la altura del sonido. Los armónicos que son potencia de 3 (3, 6, 12...) corresponden a una sucesión octavada de quintas; su presencia genera un timbre nasalizado. Los armónicos 5, 10, 20... se corresponden con la tercera de la fundamental (y sus octavas), y aportan calidez al sonido. Finalmente, los armónicos que corresponden a intervalos disonantes aportan aspereza al sonido.

Síntesis de sonido

Los primeros intentos de construir órganos eléctricos datan de más de cien años. Los pioneros fueron el estadounidense Thaddeus Cahill, inventor en 1900 del telarmonio; el ruso Léon Theremin, inventor, en 1924, del instrumento que lleva su nombre, y el francés Maurice Martenot, que en 1928 dio a luz las ondas Martenot. Si bien estos acontecimientos aislados marcaron el comienzo de un nuevo camino tecnológico, el auge en el desarrollo de instrumentos con sonidos sintéticos se potenció al terminar la Segunda Guerra Mundial. Durante el siglo pasado, los avances tecnológicos en materia de sonido han permitido, por una parte, conocer en profundidad su naturaleza y sus particularidades y, por otra, avanzar en la síntesis sonora de manera cada vez más eficiente.

La primera clave que es preciso resolver para sintetizar el sonido es justamente su «generación». Dos son los modos más utilizados para ello: el primero, emplear generadores para cada uno de los doce sonidos de la octava más aguda; el segundo, generar tan sólo el sonido más agudo de dicha octava, para resolver electrónicamente los once semitonos restantes. Una vez que la octava superior está completa, las frecuencias de las otras octavas se obtienen mediante divisores electrónicos de frecuencias, que resuelven sucesivamente la octava de cada sonido, con la simple relación 2:1.

Una vez creado el sonido base, se procede a modificar los diferentes parámetros que permitan obtener el sonido buscado. Se trata de un punto clave para los diseñadores de sonido, pues a la búsqueda de sonidos sintéticos cada vez más reales se añade, en paralelo, el afán por hallar sonidos totalmente nuevos.

Los avances en síntesis sonora de los últimos años abarcan una diversidad de aspectos que escapan al objetivo de este libro. Algunos merecen mención, no obstante, por su interés matemático, tales como los filtros y los estimuladores (*enhancers*), que actúan sobre los armónicos permitiendo modificar el timbre del sonido generado por el oscilador. Si el sonido es pobre en armónicos, se enriquece mediante los estimuladores que producen armónicos pares, en tanto que los filtros limitan o eliminan ciertas frecuencias. En general se los combina para resolver el timbre, logrando el sonido de una trompeta, un violín o cualquier otro instrumento. Los filtros más utilizados son:

- Pasabajos, que corta las frecuencias altas.
- Pasaaltos, que hace lo propio con las frecuencias bajas.
- Pasabanda, que corta frecuencias altas y bajas, y permite el paso de las centrales.
- Rechazo de banda, que corta las frecuencias centrales.

Audio digital

Todos los sonidos que escuchamos en la vida cotidiana nos llegan en forma de ondas físicas que se transmiten ya sea por aire, por el agua o por cualquier otro medio que lo permita. Desde la invención del fonógrafo por T.A. Edison en 1877 se han desarrollado distintos medios analógicos para el almacenamiento y la reproducción del sonido.

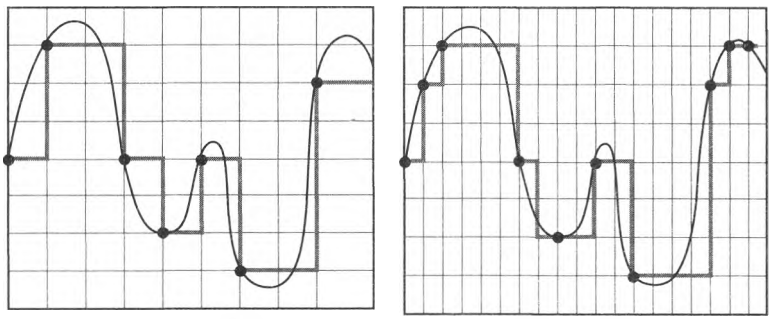
Los sistemas de audio analógicos requieren que aquél sea «traducido» mediante un transductor (como, por ejemplo, un micrófono) a una serie de impulsos eléctricos. Estos impulsos, eventualmente registrados y reproducidos, pueden ser reconvertidos en ondas físicas a través de otro transductor, como un parlante.

¿«MARY HAD A LITTLE LAMB» O «AU CLAIRE DE LA LUNE»?

Hasta el año 2008, el registro más antiguo de una voz humana era la del propio Thomas Alva Edison, que el 21 de noviembre de 1877 recitó el poema «Mary had a little lamb» («María tenía un corderito») a modo de prueba de su recién inventado fonógrafo. Unos días después realizaba la primera demostración pública de su invención y, un año más tarde, lo patentó y presentó ante la Academia Francesa de Ciencias. El invento era tan asombroso que los científicos presentes creyeron que se trataba de un fraude y que había un ventrílocuo en la sala. Las vibraciones producidas por el sonido eran literalmente grabadas en una capa de estaño (material que más adelante se sustituyó por la cera) extendida sobre la superficie de un cilindro que giraba sobre su eje. El registro acústico, en forma de surco helicoidal, era después transformado de nuevo en sonido. Durante sus primeros años de vida, el fonógrafo se empleó a modo de dictáfono por empresas e instituciones gubernamentales; de hecho, Edison nunca pensó que su invento fuera a emplearse jamás básica y fundamentalmente para capturar y reproducir interpretaciones musicales, y al principio se resistió a dicho uso, hasta el punto de prohibirlo. Sea como fuere, el cilindro musical se acabó extendiendo por todo el mundo, y hacia 1890, dio paso a los discos planos. Se da el caso de que, veinte años antes de la primera grabación de Edison, el francés Édouard-Léon Scott había inventado el fonoautógrafo, que permitía registrar las vibraciones pero no reproducirlas. Los registros del fonoautógrafo se guardaron en la Biblioteca del Congreso de Estados Unidos. En 2008, un grupo de estudiosos logró procesar uno de esos registros, fechado en 1860. De las brumas de la estática emergieron las reconocibles notas de una tonada francesa, «Au claire de la Lune» («A la luz de la Luna»), el registro acústico más antiguo de la historia.

Digitalización

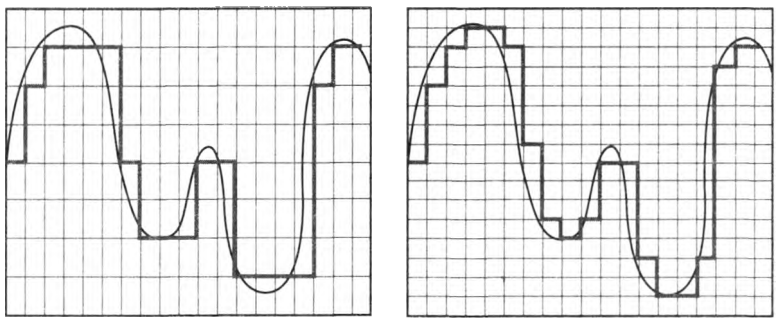
La digitalización del sonido se realiza mediante un procedimiento de modulación por impulsos codificados (PCM, o *Pulse-Code Modulation*, «Modulación de código-impulso») con un conversor analógico-digital (ADC, o *Analog-to-Digital Converter*). La señal analógica de la onda sonora puede representarse como una curva que se describe numéricamente. El procedimiento para digitalizar audio analógico consiste entonces en «discretizar» la curva: tomar una gran cantidad de muestras del sonido (proceso conocido como «muestrear» o «samplear») a intervalos regulares. A mayor cantidad de muestras, más fiel a la curva original serán el registro y la reproducción, y mayor será la calidad del sonido registrado. Lo mismo sucede en el cine: a mayor cantidad de fotogramas por segundo registrados en la filmación, más detalle se puede obtener del movimiento. Un ejemplo equivalente desde un punto de vista gráfico sería: cuántos más puntos de una curva se conocen, mejor se puede aproximar dicha curva.



Cuantas más muestras (líneas verticales) se tomen del sonido, más fiel a la curva original será su aproximación por las líneas de la cuadrícula.

El teorema de muestreo de Nyquist-Shannon demuestra que, bajo ciertas condiciones, una señal analógica cuya máxima frecuencia sea M puede ser reconstruida si la tasa de sampleo es superior a 2M muestras por segundo. Dado que la máxima frecuencia que se espera registrar es de 20.000 Hz (el límite de la audición humana), la tasa de muestreo de los CD de audio es de 44.100 muestras por segundo, cifra levemente superior al doble.

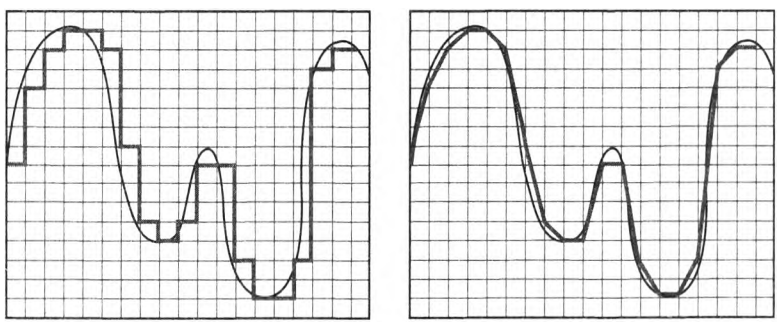
Hay otro factor que incide en la fidelidad de la conversión: la precisión con la que se toma cada muestra, lo que se conoce como *bit resolution*. Gráficamente, cada muestra tiene una cierta altura que debe ser medida. Esta medición puede ser hecha con distintos grados de precisión: cuantos más bits estén disponibles para ello, más se podrá subdividir el espacio a medir, y más precisión se obtendrá en cada muestra.



Nuevamente, cuanto más detalle (más líneas horizontales) se tenga en cada muestra, más fiel a la curva original será su aproximación por las líneas de la cuadrícula

De vuelta a lo analógico

Un conversor digital-analógico (DAC, o *Digital-to-Analog Converter*) es el encargado de reconvertir el audio digital a una señal analógica. La situación es la inversa a la que tiene lugar en el caso de la digitalización: conociendo una cierta cantidad de puntos de una curva, se busca reconstruirla mediante una «interpolación», es decir, mediante un procedimiento matemático que permite inferir cuáles podrían ser los valores intermedios presentes entre los ya conocidos. Un primer modelo de interpolación usado es el *Zero-order hold*, que consiste simplemente en mantener cada valor de sampleo en todo el intervalo. Otro método es el *First-order hold*, que aproxima la curva linealmente entre cada par de valores conocidos.



A la izquierda, interpolación por el modelo Zero-order hold. Los valores de cada intervalo entre dos valores conocidos se suponen idénticos al del extremo izquierdo; la línea se mantiene horizontal. A la derecha, interpolación por el modelo First-order hold. Los valores de cada intervalo entre dos valores conocidos se determinan por la pendiente que une esos puntos

BEETHOVEN, BAYREUTH, EL NAZISMO Y EL NACIMIENTO DEL CD



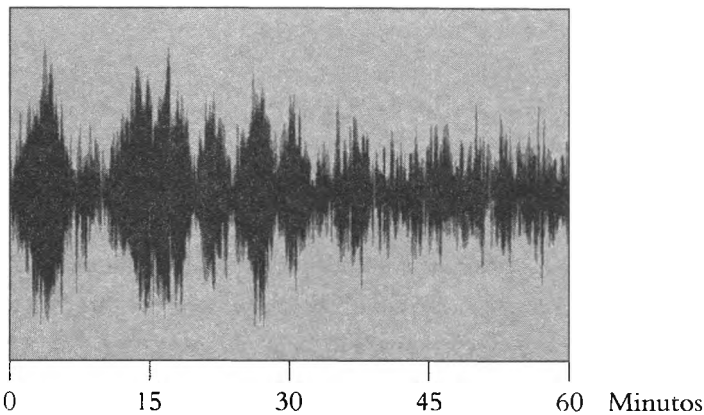
Sello conmemorativo de la muerte de Wilhelm Furtwängler, acaecida en 1954.

En la década de 1980, la tecnología del disco compacto estaba ya lo bastante desarrollada como para resultar comercialmente viable. La neerlandesa Philips y la nipona Sony eran a la sazón las líderes en el mercado del audio y la electrónica. Sony presentó un prototipo de disco compacto de 120 mm de diámetro, con una capacidad de 74 minutos. Por su parte, Philips desarrolló un prototipo de 115 mm, capaz de contener 60 minutos de música. El prototipo de Sony acabó imponiéndose y quedó así fijado el estándar que iba a dominar la tecnología durante más de 30 años. Un aspecto que llama la atención del CD tal como iba a consolidarse son sus 74 minutos de capacidad. ¿Por qué esa cifra en apariencia arbitraria? En su momento, Sony arguyó en favor de su prototipo que permitía disponer, en un sólo disco, de algunas de las grandes obras de la música universal, entre ellas, según el alto directivo Norio Ohga, la *Novena sinfonía* de Beethoven. Existe cierto consenso entre los melómanos que la grabación de referencia de esta obra monumental es la realizada en 1951 por el director de orquesta alemán Wilhelm Furtwängler con ocasión de la reapertura del Festival de Bayreuth tras la Segunda Guerra Mundial. Este festival, sito en la ciudad alemana homónima, alojaba desde 1876 representaciones anuales de las óperas de Richard Wagner, y a causa de las simpatías de los herederos de éste por la causa nazi, se había erigido durante los años previos al conflicto como el símbolo de un pangermanismo agresivo y belicoso. La reapertura, largamente esperada por toda Alemania, se entendió como un momento de inflexión para una nación arrasada y abrumada por la culpabilidad, que por medio de la *Novena sinfonía*, una obra expansiva y universal, coronada por el inmortal *Himno a la alegría*, reclamaba de nuevo su lugar en el concierto de las naciones civilizadas y pasaba página de su trágico pasado reciente. El momento era, pues, histórico, y Furtwängler y sus solistas estuvieron a la altura, con una interpretación de tal intensidad e impacto emocional que a su finalización el público, estupefacto, quedó en silencio durante varios segundos antes de prorrumpir en una oleada de aplausos y vítores que se alargó durante casi una hora. Naturalmente, los técnicos de sonido encargados de registrar el acontecimiento omitieron esta última parte, y la *Novena* de Furtwängler en Bayreuth quedó inmortalizada en una grabación de... 74 minutos.

Compresión

Audio «crudo»

Una onda sonora se representa gráficamente sobre el eje del tiempo. Para representar esta onda sobre un papel hará falta una hoja uniformemente proporcional a la duración del sonido en cuestión:



Dicho de otro modo: el sonido tiene una tasa de información constante. Los sistemas de sonido analógicos funcionan con una tasa de información constante: basta con observar que la velocidad de un giradiscos o una cinta magnetofónica se mantiene invariable durante una grabación o una reproducción. La digitalización de audio también se lleva a cabo a una tasa constante, generando un archivo de audio «crudo». El audio «crudo» con la calidad de un CD mueve mucha información, por lo que requiere archivos de gran tamaño para su almacenamiento o un gran ancho de banda para su transmisión. Esto los convierte en candidatos naturales a pasar por un proceso de compresión.

A comprimir

La compresión de datos es un proceso que permite codificar la información digital usando una cantidad menor de bits. El audio digital es comprimido a formatos como MP3, FLAC o Vorbis, tanto para almacenarlos en archivos más pequeños como para ser transmitidos con mayor rapidez. En ambos casos, el audio debe ser descomprimido antes de su reproducción.

La compresión se puede realizar mediante distintos algoritmos de codificación. Existen dos tipos fundamentales: con o sin pérdida de información. Una compresión con pérdida de información degrada la calidad del sonido de manera irrecuperable, mientras que si no existe dicha pérdida, la calidad no se degrada, lo que permite restablecer el audio a su estado original. Los métodos más generales de compresión (ZIP, RAR, ARJ, entre otros) usan algoritmos que no degradan la calidad de los archivos; si lo hicieran, un texto comprimido perdería alguna que otra letra o palabra en el proceso de compresión y descompresión.

También es importante tener en cuenta la velocidad de procesamiento de cada algoritmo: uno más complejo puede, eventualmente, lograr una mayor compresión, pero si requiere demasiado tiempo de procesamiento para comprimir y descomprimir es probable que no sea de gran utilidad para ser usado en *streaming* de tiempo real.

¿Qué formato conviene usar? ¿Cuánto conviene comprimir? Cada uno hace su propio balance entre cuánto quiere conservar la calidad original y cuánto quiere ahorrarse en espacio de almacenamiento y tiempo de transmisión. Para un uso profesional, es obvio que conviene conservar la calidad. Para otros usos, como la escucha cotidiana, el *streaming* o las comunicaciones telefónicas, los preferidos son los archivos comprimidos.

Métodos de compresión

Uno de los métodos principales de la compresión tiene que ver con la identificación de patrones y repeticiones. ¿Cómo se podría comprimir cada una las siguientes secuencias binarias?

a) 11111111111111111111111111111111...
b) 10110111011110111110111111011111...
c) 11010110001011010000101001110010...

Para acercarnos a la idea de la compresión de información podemos pensar en las instrucciones que uno debería transmitir a otra persona, que hará las veces de receptor, para que pueda reproducirlas.

La secuencia (a) es fácil de transmitir, pues basta con indicar la instrucción de «escribir siempre un 1».

La secuencia (b) es algo más difícil: «escribir cada vez un 1 más, separando cada grupo con un 0».

La secuencia (c) es la más complicada: su irregularidad da poco margen para dar instrucciones que ahorren el trabajo de transmitir los números uno por uno.

El reconocimiento de patrones se puede aprovechar fundamentalmente para comprimir textos e imágenes. Sin embargo, la información contenida en un archivo de audio es relativamente caótica, por lo que estos métodos no profundizan demasiado la compresión.

En consecuencia, la compresión de audio con pérdida de información apela a otras estrategias, como las psicoacústicas. Una de ellas consiste en la identificación y eliminación de información «perceptualmente irrelevante» (con todo lo discutible que pueda resultar esta expresión), es decir, de sonidos que, en principio, no serían escuchados por el oyente, o que difícilmente lo serían.

Otra es el *noise shaping*, que intenta desplazar el ruido hacia regiones de frecuencias que lo debiliten en la percepción del oyente, que recibe así una señal (perceptualmente) más limpia.

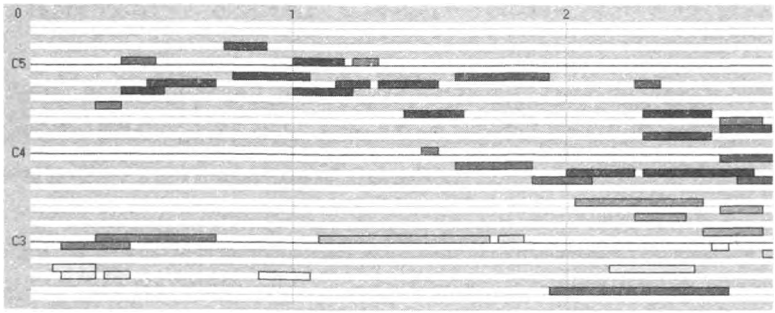
Y, por supuesto, siempre se puede apelar a una reducción tanto en la tasa de muestreo como en la cantidad de bits.

MIDI

El MIDI (*Musical Instrument Digital Interface*, o «Interfaz digital para instrumentos musicales») es un protocolo de instrucciones creado en 1982 para permitir que determinados equipos, como los ordenadores y los teclados electrónicos, puedan intercomunicarse y sincronizarse.

Las instrucciones MIDI pueden ser almacenadas en archivos que se pueden ejecutar en cualquier momento y que, por contener sólo instrucciones, tienen un tamaño mucho menor que los archivos de audio. Un archivo MIDI funciona como una partitura digital. Se compone de una serie de eventos u órdenes que se emiten a lo largo del tiempo. Estos eventos pueden controlar una gran cantidad de variables del sonido: la altura, la intensidad, el vibrato y el paneo estéreo, entre otros.

Las instrucciones típicas de un archivo podrían indicar, por ejemplo, iniciar un sonido de *do* de piano con cierta intensidad; en el instante 1 detenerlo e iniciar un sonido de *re* con la mitad de la intensidad del *do*, etcétera. Esta simplicidad las convierte en una herramienta muy versátil para componer música. Un pianista puede simplemente sentarse ante un teclado MIDI, y todo aquello que toque quedará registrado en un archivo que luego podrá modificar o adaptar con facilidad a sus necesidades.



Un ejemplo de «partitura digital». En esta matriz, el tiempo se desarrolla en el eje horizontal. Cada uno de los rectángulos indica un lapso en el que cada renglón hace las veces de un espacio o de una línea de una partitura convencional.

LOS ANTIGUOS MIDI

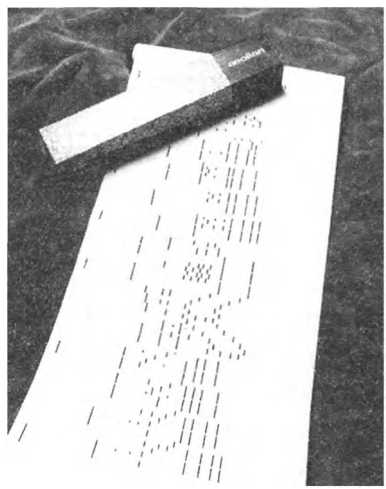


Imagen de un rodillo de pianola

Con la evolución de la mecánica, los instrumentos de cuerda se poblaron de dispositivos y palancas, los de viento, de válvulas y numerosos tubos, y la presencia de tales elementos abría la posibilidad de pensar en automatismos. Existen intentos de automatizar instrumentos musicales desde la Antigüedad. De los múltiples sistemas explorados, el rollo de papel para pianolas y organillos representa uno de los primeros métodos para guardar información sobre secuencias de sonidos. Se trata de rodillos de papel con perforaciones y cortes longitudinales, mientras que el rodillo representa una partitura de la obra musical: el tiempo que transcurre entre dos sonidos consecutivos lo determina la distribución longitudinal de los agujeros sobre la tira de papel, mientras que la nota que debe sonar viene definida por la posición del agujero con respecto a una línea transversal al movimiento. Donde hay agujero, hay sonido: un 1. Donde no hay agujero, no hay sonido: un 0. El rodillo es una tarjeta con codificación binaria, y constituye el primer soporte de información para una reproducción automática de una pieza musical.

La orquesta

Para ser ejecutada, una partitura MIDI requiere de una orquesta, es decir, de un sistema que reciba las órdenes almacenadas en el archivo y que cuente en su banco de sonidos con aquellos que se le demandan (o que sepa cómo confeccionarlos a partir de los que posee).

Una fuente para reproducir dichos sonidos es, como resulta obvio, los instrumentos reales. Así, el banco de sonido que corresponde a un piano puede estar compuesto por todas y cada de las notas de dicho instrumento, grabadas en un archivo de audio. Y lo mismo es válido para cualquier otro instrumento o sonido que se quiera tener archivado y listo para usar. En algunos casos no se graban todas las notas sino, por ejemplo, una de cada tres, recreando digitalmente las restantes a partir de las conocidas. Pero, por el contrario, es muy habitual que se grabe más de una versión de cada nota: en distintas intensidades, con distintos tipos de toque, con y sin el pedal abierto, etcétera.

Otra fuente de sonidos es la «síntesis»: sonidos artificiales, creados desde cero o por la transformación de otros sonidos. En general, los sintetizadores MIDI adoptan el sistema de afinación de temperamento igual (explicado en el primer capítulo), aunque son lo suficientemente versátiles como para poder afinarse según el sistema que se desee.

Cuantización

Cualquier ejecución en un teclado MIDI registrada en tiempo real genera una partitura digital a la que luego se le puede efectuar todo tipo de correcciones, adaptaciones, mejoras, etc. Este registro suele pasar por una «cuantización», un tamiz que encuadra la ejecución en pulsos y subdivisiones exactas de pulsos. Este proceso es muy similar al de cuantización de los impulsos eléctricos en el proceso de digitalización de audio: cada instrucción es acercada al punto más «lógico» en el que se supone que el músico quiso hacerla sonar. Sin embargo, estas correcciones automáticas se apoyan en criterios de precisión que pueden alterar fácilmente la naturalidad de la interpretación musical original.

Capítulo 5

Matemática para componer

El artista debe reglamentar su vida. He aquí el horario exacto de mis trabajos diarios: Me levanto a las 7:18. Inspirado de 10:23 a 11:47. Almuerzo a las 12:11 y recojo la mesa a las 12:14. Paseo higiénico a caballo en mi parque de 13:19 a 14:53. Otra inspiración de 15:12 a las 16:07. Ocupaciones diversas (esgrima, meditaciones, inmovilidad, visitas, contemplación, destreza, natación, etc.) de 16:21 a 18:47. Se sirve la cena a las 19:16 y termino a las 19:20. Vienen las lecturas sinfónicas a viva voz desde las 20:09 hasta las 21:59. Me acuesto regularmente a las 22:37. Cada semana me despierto sobresaltado a las 3:19 (el martes).

Erik Satie

Hasta ahora hemos visto de qué modo la matemática permite describir y exhibir distintas características propias de la música, de su naturaleza y de su discurso. En este capítulo cambia la ecuación: será la matemática la que lleve la voz cantante, a medida que la música se adentre en la exploración de los límites de la tonalidad de la mano de las vanguardias que surgieron a principios del siglo pasado.

Igualitarismo tonal: el dodecafonismo

Hacia principios del siglo XX, la música tonal había llegado a un punto de crisis. En su búsqueda de una expresividad extrema, compositores como Liszt y, fundamentalmente, Wagner y Richard Strauss habían llevado los principios armónicos del cromatismo y de la ambigüedad armónica casi hasta el límite de la disolución de la tonalidad. Como parte de este proceso surgió entonces una música «atonal», es decir, carente de un centro tonal. Uno de los compositores que incursionó en esta corriente fue Arnold Schönberg (1874-1951). Posteriormente, a comienzos de la década de 1920, el músico austriaco desarrolló la técnica compositiva que bautizó con el nombre de «dodecafonismo», a la que se acogieron otros compositores integrados en la denominada Segunda Escuela de Viena, tales como Alban Berg y Anton von Webern.

Qué es el dodecafonismo

El término «dodecafónico», también llamado «de doce sonidos», hace referencia a los distintos sonidos existentes en el sistema musical occidental (*dodeca* es «doce» en griego). Éstos se corresponden con las siete teclas blancas y las cinco negras del piano. El uso de doce sonidos requiere tener en cuenta dos importantes consideraciones:

- El sistema dodecafónico termina de unificar de manera definitiva sonidos que antes todavía mantenían identidades separadas, como, por ejemplo, *fa sostenido* y *sol bemol*, y comienza a usar uno u otro indistintamente, tomándolos como equivalentes.
- Las referencias hechas a cada uno de los doce sonidos incluyen todos los de su clase: al hablar de *do* no se hace referencia a ningún *do* en particular, sino a todas las notas *do* de las distintas octavas, funcionando cualquiera de ellas como representante de todas las de la clase. De aquí que sean «sólo» doce sonidos.

La técnica dodecafónica mantiene la idea de una música atonal: desligarse de la mayor gravitación jerárquica de una nota (la tónica) sobre las demás. El dodecafonismo desarrolló un método para evitar esa preponderancia de algunas notas sobre otras al preasignar a todas el mismo valor relativo, y organizando la música para que todas aparecieran aproximadamente la misma cantidad de veces en una composición.

NO AL TRIDECAFONISMO
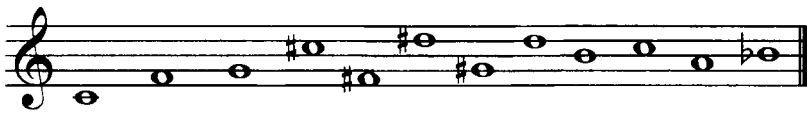
Puede parecer extraño el hecho de que Schönberg, el padre del sistema compositivo musical de doce sonidos, sufriera de triscaidecafobia, el temor supersticioso al número 13. El origen de esta fobia es incierto, aunque se padece desde muy antiguo, pues ya afectaba a los vikingos, y la tradición cristiana lo asocia a Judas, sentado en el decimotercer lugar de la mesa en la Última Cena. En la antigua Persia, este número se identificaba con el caos. El temor al 13 ha sido llevado a extremos increíbles. Así, muchas ciudades cuyas calles están numeradas no tienen una calle 13, y numerosos edificios tampoco cuentan con el piso 13. Tampoco existe en la Fórmula 1 ningún monoplaza identificado con ese número. El actor estadounidense Stan Laurel, el «flaco» de la célebre pareja conocida como «el gordo y el flaco», se llamaba en realidad Stan Jefferson (13 letras), y cambió su apellido movido por esta misma superstición. También algunos músicos

Series

Con el fin de alcanzar este objetivo, el método impone una serie de reglas compositivas. Por ejemplo, para evitar que la memoria del oyente fije su atención sobre algunas notas más que sobre otras, las composiciones deben completar ciclos integrados por las doce notas disponibles. Usada una nota, sólo puede volver a utilizarse una vez completado el ciclo de las doce.

Las notas de los ciclos no se presentan de forma desordenada, sino que cada composición se estructura en base a una «serie», esto es, un ordenamiento preciso de las doce notas disponibles.

Sin embargo, la serie no es una mera organización con fines estadísticos, sino que recibe un tratamiento motívico tradicional. En este aspecto, el dodecafonismo se reconoce a sí mismo como parte continuadora de la tradición musical occidental. La siguiente serie aparece en la *Suite* op. 25 de Schönberg, una de las primeras obras en las que usó el sistema de doce sonidos.



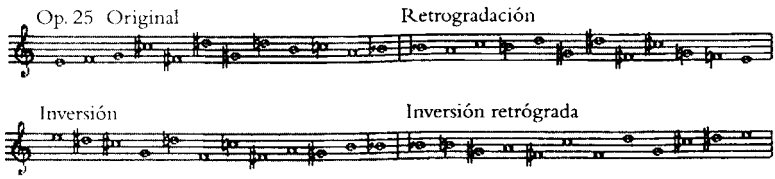
El compositor trabaja la serie junto con otras series conexas o derivadas, para cuya obtención el dodecafonismo recupera los principios compositivos de las

han mostrado, por lo menos, cierta prevención: el también estadounidense John Mayer, en su disco *Room for Squares*, grabó 14 pistas, pero en la posición 13 hay dos segundos de silencio; en la numeración general, esa pista es evitada.

Arnold Schönberg había nacido un 13 de septiembre de 1874. Llegó a renombrar su ópera *Moses und Aaron* como *Moses und Aron* para evitar que el título tuviera 13 letras. Temía morir en un año múltiplo de 13, y en 1950, cuando cumplió 76 años (7 + 6 = 13), entró en depresión. Falleció el viernes 13 de julio de 1951.

Por su parte, Alban Berg habría tenido algún tipo de obsesión con el número 23, que consideraba «fatal». Sin embargo, dicho número está muy presente en su *Suite Lírica*: muchas de sus secciones tienen cantidades de compases múltiplos de 23, así como también las marcas metronómicas.

transformaciones que hemos visto en el capítulo 3: inversión, retrogradación y transposición.



Existe una cuarta transformación que algunos compositores incluyeron en su paleta: la «rotación». Si le damos a la serie una forma circular (conectando la última nota con la primera), una rotación es el resultado de comenzar dicha serie en cualquiera de sus puntos.

La escritura dodecafónica dista de ser lo estricta que el uso de las series parece sugerir. Trabajar con ellas es la columna vertebral del dodecafonismo, pero cada compositor fue adaptándolo a sus necesidades expresivas. A partir de la serie, un compositor se vale de un conjunto de prácticas, entre las que se cuentan escribir las notas de la serie en distintas octavas y en distintos instrumentos; comenzar las series o sus transformadas antes de que termine la aparición anterior; incluir pasajes de escritura libre; trabajar con series derivadas, que se construyen con fragmentos de la serie generadora, etcétera.

¿CUÁNTAS SERIES DISTINTAS HAY?

La primera nota de la serie puede ser cualquiera de las doce disponibles. Una vez elegida la primera, la siguiente puede ser cualquiera de las once restantes, lo que da un parcial de $12 \cdot 11$ series. Elegidas las dos primeras, la tercera puede ser cualquiera de las diez restantes, lo que da un parcial de $12 \cdot 11 \cdot 10$ series. Continuando este tipo de razonamiento, los números indican un total inicial de $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 479.001.600$ series distintas. Este número se conoce como «factorial de 12», y se escribe $12!$.

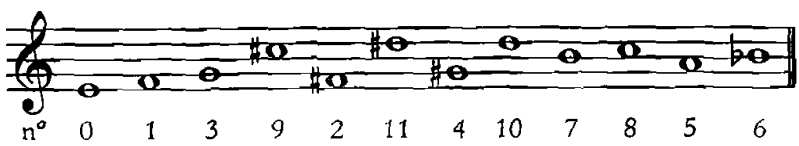
En general, para todo entero positivo n se define el factorial de n como el producto de todos los enteros positivos de 1 a n. Es decir, $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$.

Sin embargo, en el caso de las series dodecafónicas, la cuenta es un poco más complicada, ya que si se quiere conocer la cantidad de series «esencialmente» distintas hay que descontar transportes, inversiones, retrogradaciones y las combinaciones de estas operaciones. Una enumeración cuidadosa indica que el número de series posibles es 9.985.920.

Forma numérica y forma matricial

Las partituras pentagramadas tradicionales siguen la lógica de la música diatónica. Una de las consecuencias es que la distancia entre líneas y espacios vecinos no representa siempre una misma distancia musical, sino que unas veces consta de dos semitonos (de *re* a *mi*), otras de uno (de *mi* a *fa*)... Esto obliga a la música dodecafónica a escribir apelando a alteraciones. Por eso, y como se puede apreciar en los ejemplos anteriores, las inversiones y retrogradaciones de las series dodecafónicas no se «ven» en las partituras, aunque la música se siga escribiendo en ellas.

Una serie puede representarse también de forma numérica, lo que simplifica el trabajo preparatorio para la escritura motívica en base a las series y sus series conexas. A la hora de representar numéricamente una serie, por lo general se toma una nota inicial que funciona como referencia. En el ejemplo siguiente, esa nota de referencia es el *mi*, a la que se asigna el valor 0. Las demás alturas se numeran sucesivamente por semitonos: *fa* es 1; *fa sostenido*, 2; *sol* es 3, etc. Cada nota de la serie recibe un número que indica la clase a la que pertenece.



Representar una serie de notas de forma numérica permite emplear herramientas aritméticas para calcular otras series conexas. Por ejemplo, la transposición de una serie se obtiene sumando un mismo número, k, a cada uno de sus elementos:

$T_k\,(s_1, s_2, \ldots, s_{12}) \rightarrow (s_1+k, s_2+k, \ldots, s_{12}+k)$
$T_0\,(0,1,3,9,2,11,4,10,7,8,5,6) \rightarrow (0,1,3,9,2,11,4,10,7,8,5,6)$
$T_1\,(0,1,3,9,2,11,4,10,7,8,5,6) \rightarrow (1,2,4,10,3,0,5,11,8,9,6,7)$
$T_2\,(0,1,3,9,2,11,4,10,7,8,5,6) \rightarrow (2,3,5,11,4,1,6,0,9,10,7,8)$
...
$T_7\,(0,1,3,9,2,11,4,10,7,8,5,6) \rightarrow (7,8,10,4,9,6,11,5,2,3,0,1)$
...
$T_{11}\,(0,1,3,9,2,11,4,10,7,8,5,6) \rightarrow (11,0,2,8,1,10,3,9,6,7,4,5)$

La cuenta después del 11 vuelve a comenzar desde 0, tal como sucede al sumar las horas del día: 7 horas después de las 8 de la mañana son las 3 de la tarde. En

matemáticas, este tipo de operaciones sobre conjuntos reducidos de números recibe el nombre de «aritmética modular». Para el caso de las series dodecafónicas, el conjunto de números es el comprendido entre 0 y 11, para un total de 12. Al número de elementos del conjunto se lo denomina módulo (para el caso, 12). Así pues, en una aritmética de módulo 12, el número 13 es equivalente al 1 y se escribe:

$$13 \equiv 1 \text{ (mód. 12)}.$$

Todos los números de la forma $12k + 1$ son asimismo iguales a 1 siendo k un entero:

$$25 \equiv 1 \text{ (mód. 12)}$$
$$37 \equiv 1 \text{ (mód. 12)}$$
$$49 \equiv 1 \text{ (mód. 12)}$$
$$61 \equiv 1 \text{ (mód. 12)}$$
$$\ldots$$

Como ya hemos dicho, el dodecafonismo no distingue entre notas análogas pertenecientes a octavas distintas. La aritmética en módulo 12 refleja este hecho, puesto que el número 1, un *fa* en nuestro ejemplo, equivale al 13, que vuelve a ser un *fa*.

Armados con las herramientas de la aritmética modular se observa que la inversión de una serie equivale a asignar a cada valor numérico del 0 al 11 (es decir, a cada nota distinta) la diferencia entre aquel número y el 12. El valor 1 de la serie se transforma así en 11; el 2 en 10; el 3 en 9... Para el caso de la serie que estamos manejando como ejemplo:

$$I\,(s_1, s_2, \ldots, s_{12}) \rightarrow (s_1, 12\text{-}s_2, \ldots, 12\text{-}s_{12})$$
$$I\,(0, 1, 3, 9, 2, 11, 4, 10, 7, 8, 5, 6) \rightarrow (0, 11, 9, 3, 10, 1, 8, 2, 5, 4, 7, 6)$$

La retrogradación se obtiene a su vez «dando la vuelta» a la serie numérica, de derecha a izquierda:

$$R\,(s_1, s_2, \ldots, s_{12}) \rightarrow (s_{12}, s_{11}, \ldots, s_1)$$
$$R\,(0, 1, 3, 9, 2, 11, 4, 10, 7, 8, 5, 6) \rightarrow (6, 5, 8, 7, 10, 4, 11, 2, 9, 3, 1, 0)$$

La serie original, con su inversa, su retrógrada, la inversa de su retrógrada y cada una de éstas 4 con sus 12 transposiciones posibles, otorgan al compositor una paleta de $4 \cdot 12 = 48$ permutaciones que tendrá disponibles para su obra. (Si se conside-

ran las rotaciones, la cifra de permutaciones asciende a $48 \cdot 12 = 576$.) Estas 48 formas pueden condensarse en una matriz de 12 por 12, siguiendo estas reglas:

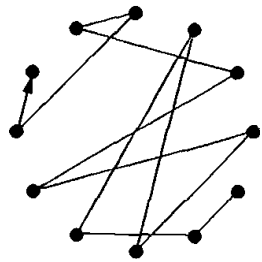
- En la primera fila T_0 se anota la serie original (marcada en negrita en el ejemplo).
- En la primera columna I_0, la inversa de la serie (también en negrita).
- En cada una de las casillas restantes se anota la suma (módulo 12) de los números que encabezan su fila y columna. Por ejemplo, la quinta fila comienza con un 10, y la cuarta columna, con un 9, por lo que la casilla en la que se cruzan debe ir un 7, ya que $10 + 9 = 19 \equiv 7$ (mód. 12).

Así, las doce filas contienen la serie original con todas sus transposiciones, y las doce columnas contienen la inversa de la serie original con todas sus transposiciones. Las retrógradas de estas veinticuatro se encuentran simplemente recorriendo la matriz en el otro sentido: las filas de derecha a izquierda, y las columnas, de abajo arriba.

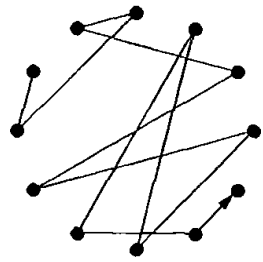
	I_0	I_1	I_3	I_9	I_2	I_{11}	I_4	I_{10}	I_7	I_8	I_5	I_6	
T_0	**0**	**1**	**3**	**9**	**2**	**11**	**4**	**10**	**7**	**8**	**5**	**6**	R_0
T_{11}	**11**	0	2	8	1	10	3	9	6	7	4	5	R_{11}
T_9	**9**	10	0	6	11	8	1	7	4	5	2	3	R_9
T_3	**3**	4	6	0	5	2	7	1	10	11	8	9	R_3
T_{10}	**10**	11	1	7	0	9	2	8	5	6	3	4	R_{10}
T_1	**1**	2	4	10	3	0	5	11	8	9	6	7	R_1
T_8	**8**	9	11	5	10	7	0	6	3	4	1	2	R_8
T_2	**2**	3	5	11	4	1	6	0	9	10	7	8	R_2
T_5	**5**	6	8	2	7	4	9	3	0	1	10	11	R_5
T_4	**4**	5	7	1	6	3	8	2	11	0	9	10	R_4
T_7	**7**	8	10	4	9	6	11	5	2	3	0	1	R_7
T_6	**6**	7	9	3	8	5	10	4	1	2	11	0	R_6
	RI_0	RI_1	RI_3	RI_9	RI_2	RI_{11}	RI_4	RI_{10}	RI_7	RI_8	RI_5	RI_6	

Forma circular

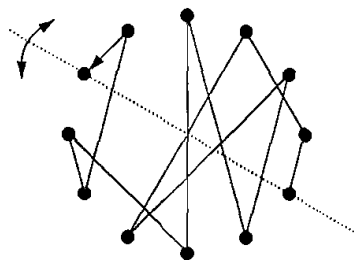
La representación circular de una serie es especialmente útil para estudiar el dodecafonismo. Por ejemplo, la representación circular de la serie del op. 25 de Schönberg con la que venimos trabajando es:



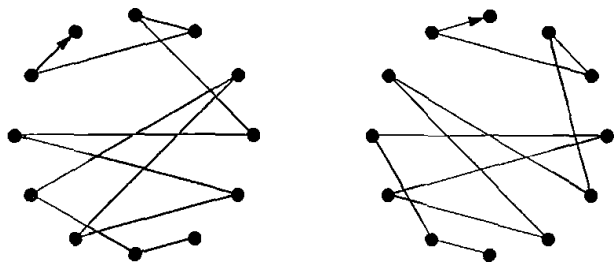
Para obtener la retrogradación de la serie sólo se tiene que dar la vuelta al sentido del recorrido:



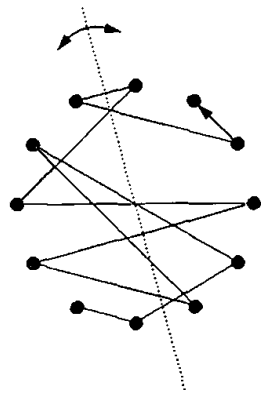
Para invertir la serie, basta con invertirla con respecto al eje de simetría que pasa por tu tono de referencia:



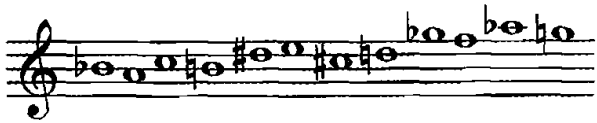
Para transportarla hay que girar la cantidad de «horas» que se quiera:



La inversa de un transporte puede obtenerse reflejándola en el eje adecuado:

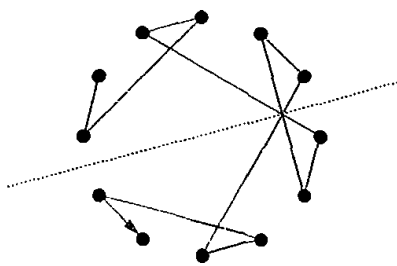


La forma circular permite apreciar mejor la estructura interna de algunas series. Por ejemplo, la serie del *Cuarteto para cuerdas* op. 28 de Anton Webern que, como vimos, está construida sobre el tema BACH:

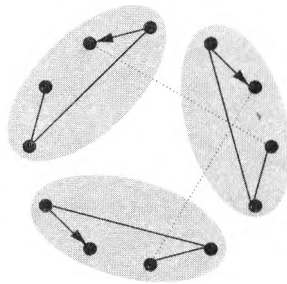


Esta misma serie, representada de forma circular, permite reconocer su simetría con mucha más claridad. En la imagen se ha marcado con una línea de puntos la simetría de la serie, cuyas mitades son, recíprocamente, sus retrógradas transportadas. Esto hace que la serie *S* sea igual a su inversa retrógrada, transportada tres semitonos descendentes. Es decir, que dicha serie se obtiene aplicando a la serie original las funciones ya conocidas de retrogradación (*R*), inversión (*I*) y transposición (*T*), esta última tres veces:

$$S = T3(I(R(S)))$$
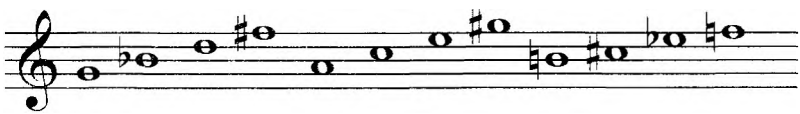


El tema BACH, que ya de por sí es simétrico, aparece tres veces: la primera en su forma primaria; la segunda, invertida y transportada, y la tercera, transportada:



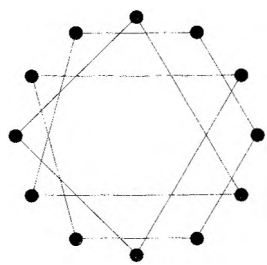
En la representación circular, las rotaciones aparecen conectando la última nota con la primera, cerrando un «circuito», y comienzan el recorrido en cualquiera de los puntos del circuito.

Alban Berg

El tercer gran referente de la Segunda Escuela de Viena fue Alban Berg (1885-1935). Dueño de un lenguaje musical intenso, el uso que hizo de las técnicas dodecafónicas no le impidió imprimir a su obra un carácter sumamente expresivo. Entre sus obras más conocidas se encuentran las óperas *Wozzeck* y *Lulu*, además de la *Suite lírica para cuerdas* y su *Concierto para violín*. La serie de esta última composición...

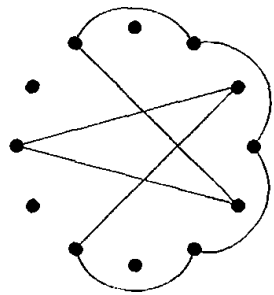


...exhibe una sorprendente simetría al considerarla como circuito, conectando la última nota con la primera:



La serie en cuestión tiene una resonancia tonal que se hace evidente al considerarla en su forma numérica (0, 3, 7, 11, 2, 5, 9, 1, 4, 6, 8, 10). Se observa que incluye un encadenamiento de cuatro acordes mayores y menores, reconstruyendo un tramo del círculo de quintas: 0-7, 7-2, 2-9 y 9-4. El circuito se completa con cuatro tonos seguidos.

El siguiente gráfico circular muestra estos encadenamientos de quintas, eliminando algunos de los elementos intermedios:



Serialismo, control y caos

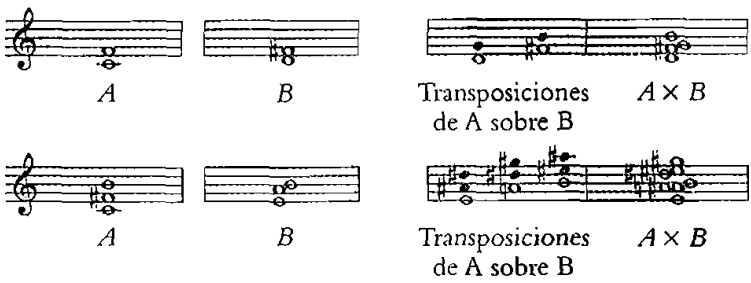
El dodecafonismo abrió el camino a una composición musical fuertemente influida por distintos modelos matemáticos. Los principios que aplicó a las alturas a través de las series no tardaron en ser transferidos a otros parámetros de la música. La intención original era eliminar estadísticamente la preponderancia de una altura sobre cualquier otra. ¿Por qué no hacer lo mismo con otros parámetros, como la intensidad, las duraciones de las notas, el timbre o el registro? El método es esencialmente idéntico que en el caso de las alturas. Para trabajar las intensidades se confecciona una tabla en la que se enumeran doce graduaciones de la intensidad, desde el «cuádruple pianissimo» hasta el «cuádruple fortissimo». Con estos elementos es posible confeccionar una serie de intensidades, que estará lista para su posterior tratamiento serial:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
pppp	*ppp*	*pp*	*p*	*quasi p*	*mp*	*mf*	*quasi f*	*f*	*ff*	*fff*	*ffff*
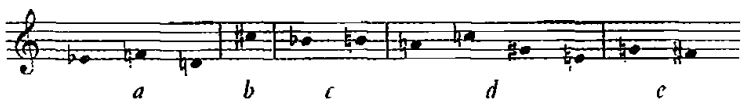
Del mismo modo, es posible serializar las duraciones de las notas, o cualquier otro parámetro de la música, para luego aplicar los procedimientos matemático-musicales que se prefieran. Compositores como el francés Pierre Boulez (n. 1925)

o el alemán Karlheinz Stockhausen (1928-2007) son algunos de los exponentes de esta corriente, que hizo un uso sistemático del trabajo con las series aplicadas a los distintos parámetros de la música, y que se bautizó como «serialismo integral».

Boulez desarrolló un procedimiento de «multiplicación de bloques». Cada uno de los dos bloques armónicos A y B es un acorde, un conjunto determinado de alturas. El bloque A es transportado tomando a cada una de las notas de B como nota inferior. El producto A × B es la unión armónica de todas estas transposiciones.



Este procedimiento fue aplicado por Boulez en su obra *Le marteau sans maître*, dividiendo una serie en cinco bloques *a*, *b*, *c*, *d* y *e*, que se multiplicaban según el procedimiento recién descrito:



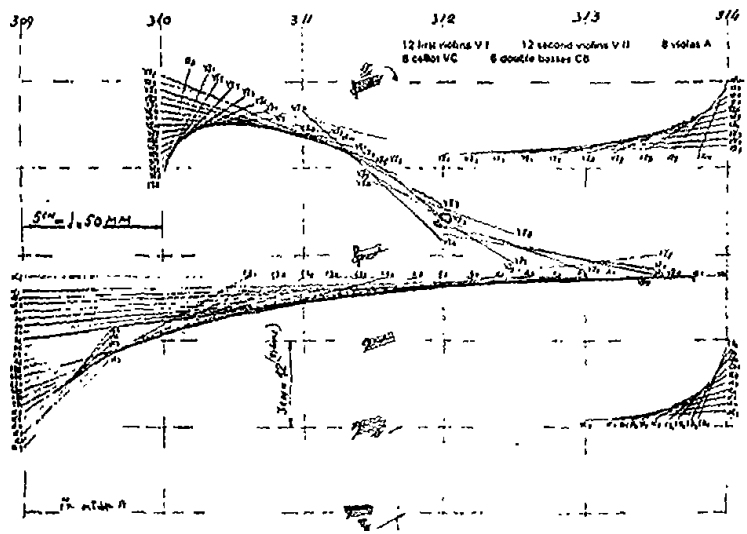
Éste es un interesante ejemplo de transpolación de un concepto matemático como la multiplicación a un terreno en el que originalmente no parecería tener sentido su aplicación. Sin embargo, todo este esfuerzo no resultó demasiado fructífero. El serialismo, al restringir el proceso compositivo a un mero juego abstracto y aislado, hizo que las composiciones resultantes fueran virtualmente imposibles de «decodificar» en términos musicales. El propio Boulez se hizo eco de esta problemática en referencia a su obra *Structures I*:

«Yo quise erradicar de mi vocabulario absolutamente todo rastro de convencionalismo, tanto en lo concerniente a las rítmicas y a las frases como al desarrollo y a la forma. Entonces, elemento por elemento, quise recuperar las distintas etapas del proceso de composición, de tal manera que pudiera perfectamente surgir una nueva síntesis que no estuviera dañada desde el principio por organismos extraños de reminiscencias de un estilo en particular».

Música estocástica

El compositor rumano de ascendencia griega Iannis Xenakis (1922-2001) criticó el serialismo sobre la base de que toda planificación serial e independiente de los distintos parámetros musicales (alturas, duraciones, intensidades, etc.) acaba aislando estos componentes e impide su interrelación. La organización de las distintas series en paralelo podría asimilarse a la idea de una polifonía conceptual, con un oyente ideal capaz de apreciar el desarrollo de cada serie como lo hacía con las distintas voces melódicas de una obra tradicional. Sin embargo, el resultado se parecía más a un conjunto de elementos dispersos que configuraban una única masa sonora global.

Xenakis, que también era arquitecto, buscó con sus métodos compositivos generar una música estructurada que reconstruyera una coherencia entre la estética y la naturaleza. Su música aparece ante el oyente en forma de «nubes sonoras» que evolucionan en el tiempo. Estas nubes están conformadas por un montón de partículas sonoras, elementos de escasa relevancia individual, pero que contribuyen estadísticamente al todo. Trazadas las grandes líneas estructurales de la obra, la distribución de estas partículas se establece en base a un conjunto de herramientas y modelos matemáticos de gran sofisticación que incluyen apelaciones a los métodos probabilísticas y algebraicos, teoría de grupos y teoría de juegos.



Partitura de Metastasis, *de Iannis Xenakis.*

Un juego de dados con Mozart

Wolfgang Amadeus Mozart (1756-1791) y Joseph Haydn (1732-1809) son los compositores más conocidos del llamado periodo clásico. Con una estética muy accesible en la superficie, la música de aquella etapa se regía por pautas compositivas estrictas que ambos dominaban a la perfección.

El auge de la música del periodo clásico coincide con el ciclo de gestación de la Revolución industrial, es decir, con máquinas capaces de automatizar los procesos de producción y reproducir el trabajo humano a gran escala. Semejante cambio modificó las formas de organización social y económica, e incorporó la idea de la producción en serie al imaginario popular.

Johann Philipp Kirnberger (1721-1783) fue un compositor y teórico de la música, alumno de Bach y creador de varios temperamentos que llevan su nombre. En 1757 publicó el primero de una serie de juegos que sistematizaban la composición musical y que permitían a cualquier persona generar sus propias piezas aun sin tener conocimientos musicales.

Mozart y Haydn también participaron en ese pasatiempo y crearon sus propios *Musikalisches Würfelspiel*, o «juego de dados» musical. El que sigue, atribuido a Mozart, consta de 176 compases ya compuestos, numerados y dispuestos en dos tablas. Cada tabla se compone de 16 columnas; de cada una de ellas debe elegirse un número, que surgirá simplemente del azar tras lanzar dos dados comunes de seis caras.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	96	22	141	41	105	122	11	30	70	121	26	9	112	49	109	14
3	32	6	128	63	146	46	134	81	117	39	126	56	174	18	116	83
4	69	95	158	13	153	55	110	24	66	139	15	132	73	58	145	79
5	40	17	113	85	161	2	159	100	90	176	7	34	67	160	52	170
6	148	74	163	45	80	97	36	107	25	143	64	125	76	136	1	93
7	104	157	27	167	154	68	118	91	138	71	150	29	101	162	23	151
8	152	60	171	53	99	133	21	127	16	155	57	175	43	168	89	172
9	119	84	114	50	140	86	169	94	120	88	48	166	51	115	72	111
10	98	142	42	156	75	129	62	123	65	77	19	82	137	38	149	8
11	3	87	165	61	135	47	147	33	102	4	31	164	144	59	173	78
12	54	130	10	103	28	37	106	5	35	20	108	92	12	124	44	131

	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
1	72	6	59	25	81	41	89	13	36	5	46	79	30	95	19	66
2	56	82	42	74	14	7	26	71	76	20	64	84	8	35	47	88
3	75	39	54	1	65	43	15	80	9	34	93	48	69	58	90	21
4	40	73	16	68	29	55	2	61	22	67	49	77	57	87	33	10
5	83	3	28	53	37	17	44	70	63	85	32	96	12	23	50	91
6	18	45	62	38	4	27	52	94	11	92	24	86	51	60	78	31

El jugador-compositor comienza arrojando los dados para obtener en la suma un número entre 2 y 12. Este número indica la fila elegida de la columna 1. Por ejemplo, si al arrojar los dados obtiene un 3 y un 5, es decir, un 8, significa que de la columna 1 debe elegir el número presente en la fila 8, que resulta ser el 152. Ese número lo remite al compás indicado 152, que era el primero de su «obra». Repitiendo este procedimiento para cada una de las columnas restantes (con un solo dado en la segunda tabla), completa los 32 compases de la misma.

¿Cuántas obras?

¿Cuántas obras distintas es capaz de generar este juego? El primer compás tiene 11 formas de ser completado, una para cada posible resultado del lanzamiento de los dados: de 2 a 12. Para cada una de ellas hay 11 formas de completar el segundo compás; en total son $11 \cdot 11 = 11^2 = 121$ formas de completar los dos primeros compases.

Para cada una de ellas hay 11 formas de completar el tercer compás, por lo que hacen un total de $11^2 \cdot 11 = 11^3 = 1.331$ formas de completar los tres primeros compases.

OULIPO

Un procedimiento combinatorio parecido al expuesto fue utilizado en el siglo xx por el escritor francés Raymond Queneau, quien, junto con el matemático François Le Lionnais fundó, en 1960, el Oulipo, acrónimo de *Ouvroir de littérature potentielle* (Taller de literatura potencial). Su obra *Cent mille milliards de poèmes (Cien billones de poemas)* consta de diez sonetos, cada uno de cuyos catorce versos puede ser combinado con cualquier otro verso de los demás sonetos. Así, hay 10 posibles primeros versos, 10 posibles segundos, etc., lo que hace un total de 10^{14} posibles sonetos, cifra que da nombre a la obra.

Cada compás del *menuetto* multiplica por 11 la cantidad de opciones, y cada compás del trío las multiplica por 6. En total, el juego es capaz de generar $11^{16} \cdot 6^{16} = 129.629.238.163.050.258.624.287.932.416 \simeq 1{,}3 \cdot 10^{29}$ «obras» distintas. Si alguien pretendiera interpretarlas todas, una tras otra, sin descanso y con una duración de 30 segundos por obra, tardaría más de 123.000 trillones de años.

Un dato curioso es que, si lo que se buscaba era que la música fuera variada, el juego está «mal» planteado en términos de cálculo de probabilidades. Al tirar dos dados los resultados posibles van de 2 a 12, pero éstos no son equiprobables: mientras que el 7 surge como resultado de seis combinaciones, el 2 o el 12 surgen sólo de una combinación cada uno, tal como se aprecia en la siguiente tabla:

Resultado	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Combinaciones	1+1	1+2 2+1	1+3 2+2 3+1	1+4 2+3 3+2 4+1	1+5 2+4 3+3 4+2 5+1	1+6 2+5 3+4 4+3 5+2 6+1	2+6 3+5 4+4 5+3 6+2	3+6 4+5 5+4 6+3	4+6 5+5 6+4	5+6 6+5	6+6
Total	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

Copiando a los grandes

Un método pedagógico muy utilizado en la enseñanza de la composición es aquel en el que el alumno debe escribir obras en el estilo de los grandes compositores de la historia: una fuga al estilo de Bach, un movimiento de sonata al de Beethoven, o un preludio al de Debussy.

Tomemos como ejemplo a Beethoven. En el proceso de copiar su estilo, un alumno aprende a dominar diferentes técnicas compositivas que hacen que la música «suene a Beethoven.» Pero ¿en qué consiste el «estilo Beethoven»? Es posible enumerar algunas pautas: la forma en la que trabaja los motivos temáticos, el modo en que se desenvuelve la armonía, cuándo utiliza intervalos melódicos más o menos amplios, el uso de los silencios y los contrastes dinámicos, etcétera.

Cada una de las dimensiones musicales de un estilo puede ser analizada estadísticamente. Por ejemplo, si se quieren estudiar las características de los motivos temáticos de las sonatas de Beethoven, se puede confeccionar una estadística que indique cuán amplio es el registro que usan, es decir, el intervalo entre la nota más grave y

la más aguda. Un estudio estadístico nos mostraría cuántos de esos motivos tienen una extensión máxima de 1 semitono, cuántos de 2, de 3, de 4... (¿cuál será la extensión mínima usada por Beethoven, es decir, el primer valor no nulo de esta secuencia?). Una estadística semejante podría confeccionarse para cualquier otro parámetro que se quiera investigar.

Sin embargo, aunque las técnicas basadas en la estadística permiten recrear un balance general, no son sensibles al contexto: al intentar copiar un estilo, tal vez no sea tan importante la distribución de las notas (de nada sirve saber que una obra tiene tal cantidad de notas *do* si en el momento de querer copiar su estilo escribimos todos esos *do* juntos y al comienzo). Más importante que saber cuántas veces habría que usar cada nota es saber cómo encadenarlas entre sí.

Las «cadenas de Markov» son una herramienta matemática que permite acercarse a una resolución de ese problema. La técnica consiste en estudiar y reproducir estadísticamente cómo los diferentes «estados» que puede tomar un sistema se van sucediendo unos a otros. Aplicada a la creación de una melodía, permite reproducir los patrones que marcan de qué modo la presencia de las sucesivas notas va influyendo en la elección de la que les sigue.

El cumpleaños de Markov
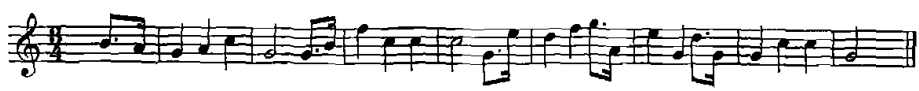
El siguiente ejemplo hace uso de cadenas de Markov para generar una melodía al «estilo» del conocido «Feliz cumpleaños».



La siguiente tabla indica la cantidad de apariciones de cada nota en la melodía:

Sol	La	Si	Do	Re	Mi	Fa	Sol'
8	3	2	6	2	2	2	1

Una melodía que recrease el estilo del «Feliz cumpleaños» parece que debería disponer sus notas según estas proporciones, aunque en realidad difícilmente tendría alguna semejanza con la original.



En lugar de analizar cuántas veces aparece cada nota, las cadenas de Markov permiten estudiar cómo se suceden unas a otras. Las 26 notas de la melodía se encadenan a través de 25 vecindades o transiciones: la primera transición es *sol-sol*, la segunda es *sol-la*, etc. En total podría haber un máximo de $8 \cdot 8 = 64$ transiciones distintas, pero no todas ellas están presentes en la melodía.

La siguiente tabla indica la cantidad de transiciones de cada tipo:

		Siguiente nota								Total
		Sol'	Fa	Mi	Re	Do	Si	La	Sol	
Nota	Sol'			1						1
	Fa		1	1						2
	Mi					2				2
	Re					2				2
	Do				1	1	2		1	5
	Si							1	1	2
	La		1						2	3
	Sol	1			1	1		2	3	8

Aunque la primera nota la escojamos aleatoriamente, a ella le seguirá otra, y a ésta una tercera, y así sucesivamente, todas ellas generadas mediante un azar controlado por la información sobre transiciones contenida en la tabla.

Comencemos la nueva melodía en *sol*, la misma nota con la que comienza la melodía original. ¿Qué notas pueden continuar a este *sol* inicial? La última fila de la tabla indica que en la melodía del «Feliz cumpleaños» el *sol* tiene ocho continuaciones: una vez *sol* superior; otra *re*; otra *do*; dos veces *la*, y tres el mismo *sol*. Asignamos un número del 1 al 8 a cada posible continuación, y elegimos un número al azar del 1 al 8 para determinar la segunda nota de la melodía: será *sol* superior si sale el 1, *re* si sale el 2, *do* si sale 3, *la* si sale 4 o 5, y *sol* nuevamente si sale 6, 7 u 8. Supongamos que sale 3, lo que implica que la segunda nota de nuestra nueva melodía será *do*.

El proceso se repite con las 5 posibles continuaciones de *do*: *re, do, si, si* y *sol*. Un número al azar del 1 al 5 determinará la tercera nota de la nueva melodía. Supongamos que sale 4. Anotamos un *si* como tercera nota. Este proceso se repite la cantidad de veces necesaria. Lo que sigue es una melodía generada mediante esta técnica:
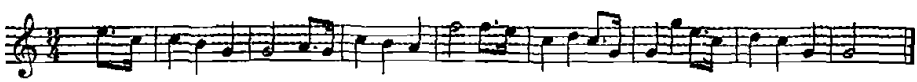


El segundo cumpleaños

Acabamos de hacer un análisis mediante un proceso de Markov de primer orden, teniendo en cuenta la influencia de cada nota en la siguiente. Pero ¿por qué no evaluar, mediante un proceso de Markov de segundo orden, la influencia de cada par de notas en la que les sigue? Volvemos a analizar la melodía original. La primera transición de segundo orden es *sol-sol* ⇒ *la*. La siguiente es *sol-la* ⇒ *sol*.

Aunque hay un universo de $64 \cdot 8 = 512$ posibles transiciones de segundo orden, sólo unas pocas están presentes en la melodía, que se encuentran en esta tabla:

		Siguiente nota								Total
		Sol'	Fa	Mi	Re	Do	Si	La	Sol	
Par de notas	Sol'-Mi					1				1
	Fa-Fa			1						1
	Fa-Mi					1				1
	Mi-Do				1	1				2
	Re-Do								1	1
	Do-Re					1				1
	Do-Do						1			1
	Do-Si							1	1	2
	Do-Sol								1	1
	Si-La		1							1
	Si-Sol								1	1
	La-Fa		1							1
	La-Sol				1	1				2
	Sol-Sol'			1						1
	Sol-Re					1				1
	Sol-Do						1			1
	Sol-La								2	2
	Sol-Sol	1						2		3

El proceso para generar una melodía de segundo orden es el mismo que el anterior, sólo que ahora hay muy pocas vías para «escapar» de la melodía original. La siguiente es una melodía generada por este método:



Estas melodías buscan retratar la melodía del «Feliz cumpleaños» replicando sólo la forma en la que las notas se suceden unas a otras. La misma técnica puede ser utilizada para copiar otras dimensiones musicales: las duraciones de las notas, las secuencias armónicas, los registros usados, la orquestación, etcétera.

EMI

El programa EMI (*Experiments in Musical Intelligence*, o «Experimentos en inteligencia musical»), además de intentar reproducir el estilo de algunos de los grandes compositores, también escribe sus propias obras.

Creado por el estadounidense David Cope, EMI analiza las obras de un compositor y toma muestras de ellas, pequeñas «células» musicales que luego recombina para crear otras nuevas, siguiendo el estilo del compositor analizado. Guiado por un operador entrenado, EMI usa estas muestras para generar sus tablas al modo de las tablas del *Musikalisches Würfelspiel* de Mozart. Posteriormente, para recomponer esos fragmentos aislados y crear sus propias obras, EMI apela a distintas técnicas de inteligencia artificial. Las obras de EMI pasaron por el «juicio» de audiencias humanas: algunos de los oyentes quedaron encantados, mientras que otros se enfurecieron e incluso se inquietaron ante la aparente capacidad de los automatismos para replicar el genio humano. Cope no cree que en el futuro siga habiendo ese tipo de reacciones: «En definitiva, una computadora es apenas una herramienta con la que podemos ampliar nuestra mente. La música compuesta por nuestros algoritmos es tan nuestra como la creada por nuestra más humana inspiración».

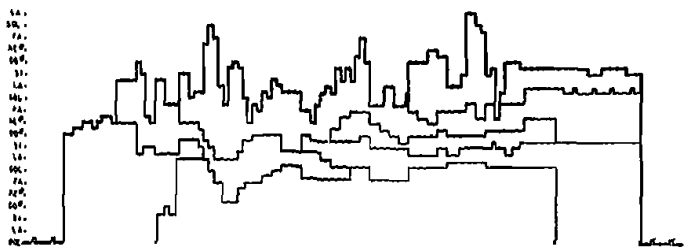
Mecanizar

El programa de Cope nos lleva a plantearnos un interrogante de calado: ¿Es posible mecanizar el proceso creativo? Antes incluso que los dados de Mozart, aparecieron los primeros autómatas musicales. En el siglo XVII, Athanasius Kircher creó el *Arca Musarithmica*, el primer instrumento que seguía un algoritmo para diseñar una piezas musicales a 4 voces. A comienzos del siglo XIX, Dietrich Nikolaus Winkel (1773-1826) creó el *Componium*, un órgano automático con dos rodillos que se alternaban de manera azarosa en la ejecución. Para empezar a responder a esta pregunta, cabría saber algo más acerca de la fuente de inspiración de los compositores, y si hay casos en que ésta haya surgido de procesos reproducibles o imitables.

Inspiración

Al igual que otros muchos artistas, en el momento de hacer su música los compositores se inspiran en los más diversos elementos: una persona querida, un hecho o un personaje histórico, la obra de otro artista... Los conciertos de *Las cuatro estaciones*, de Antonio Vivaldi, la *Sinfonía fantástica*, de Hector Belioz, o la *Obertura 1812*, de Piotr Chaikovski son algunas de las más conocidas obras que pueden ser incluidas dentro de la llamada «música descriptiva», es decir, aquella que hace explícitos ciertos lazos con la realidad extramusical. En todos estos casos citados la fuente de inspiración es un referente ambiental, histórico o literario perteneciente al acervo común o, al menos, al de los contemporáneos del compositor.

Pero la inspiración no siempre surge de aquello que el compositor más evidentemente comparte con otras personas, o lo hace de forma sutilmente alterada por la naturaleza de su creatividad. Así, el brasileño Heitor Villa-Lobos (1887-1959) escribió en 1939 (con una revisión posterior en 1957) su obra *New York Skyline* con melodías que le fueron sugeridas por el contorno de los edificios de la ciudad de Nueva York, dibujando esos contornos en papel cuadriculado.



Sir Edward Elgar (1857-1934), por su parte, dedicó sus célebres *Variaciones Enigma* sobre un tema original op. 36 a «mis amigos retratados en la obra». Cada variación está identificada con las iniciales o con referencias a alguna persona cercana que Elgar retrató musicalmente. Sin embargo, no es ése el verdadero «enigma» que da nombre a la obra, sino otro que todavía no ha sido descifrado: el propio Elgar dice haber dejado una melodía «oculta» a lo largo de la obra. Como si fuera un protagonista de una obra de teatro que nunca aparece en escena, pero alrededor del cual tiene lugar toda la trama, esta melodía misteriosa nunca se escucha en la obra, que está constantemente ligada a esa melodía en términos musicales. A partir de la publicación de la obra se han propuesta muchas «soluciones» al enigma, aunque ninguna parece haber sido lo suficientemente convincente por el momento.

Composición algorítmica

Un algoritmo es una receta, un conjunto de instrucciones que indican de qué modo se resuelve un determinado problema o se completa una tarea. La ciencia matemática apela a los algoritmos para enseñar cómo se realizan las operaciones aritméticas elementales. Los ordenadores llevan a cabo la práctica totalidad de sus procesos siguiendo algoritmos. Aunque una definición rigurosa (de las muchas existentes) indicaría ciertas características que un algoritmo debe cumplir (debe ser finito, tener instrucciones bien definidas, etc.), para nuestros propósitos podemos quedarnos con la idea informal de que se trata de un conjunto de pasos y/o reglas a seguir para conseguir un resultado.

La composición algorítmica modela matemáticamente el proceso «convencional» de la inspiración. El compositor diseña un algoritmo que recibe cierta información como *input* (entrada) y genera otra nueva como *output* (salida). ¿Qué sentido tiene que un algoritmo genere música? Al fin y al cabo, parece razonable reclamar que la música sea una forma de comunicación que manifieste las emociones de una persona y/o de su visión de la realidad. Entonces, ¿para qué se necesita una máquina que escriba música? ¿Es eso música? ¿Qué es la música?

En primer lugar, aunque la música sigue siendo un medio de expresión de lo sublime, hace mucho que ha dejado de serlo de manera exclusiva, y en muchos casos se ha convertido en una de las materias primas de un enorme mercado que constantemente requiere la producción de nuevas canciones, nuevos intérpretes, nuevas propuestas... En este sentido, un compositor no es más que un engranaje del que se podría llegar a prescindir. En todo caso, el hecho de que la persona pueda ser prescindible no cuestiona la calidad de su trabajo, ni pone en duda la validez de un algoritmo que lo reemplace, sino que pone de manifiesto la estandarización de un sistema que antes pedía poco a la persona y ahora al algoritmo.

En segundo lugar, diseñar un algoritmo capaz de «escribir» buena música es un desafío al que difícilmente se resisten los programadores de ordenadores con intereses musicales. Las reglas que sigue la música pueden ser analizadas matemáticamente, pero siempre hay un límite a partir del cual las explicaciones apelan a términos difusos, como inspiración, espiritualidad, sensibilidad, arte. ¿Acaso es posible cruzar ese límite? ¿Son inalcanzables para la inteligencia terrenal las reglas profundas de la creación musical? ¿O llegará el día en que algún programador de ordenadores, con la ayuda de modernas técnicas matemáticas, podrá convertirse en una especie de Prometeo, capaz de «robar» el fuego divino de la inspiración y hacerlo accesible a todos?

Anexo I

Conceptos básicos de escritura y de teoría musical

En el presente anexo llevaremos a cabo un repaso de los conceptos básicos de la teoría musical y de la notación con el propósito de facilitar la comprensión de los contenidos del libro. La escritura musical es un ejemplo de la matemática aplicada a una disciplina artística. Aunque tal vez no resulte tan evidente como, pongamos por caso, los aportes de la geometría al dibujo, la escritura musical moderna incluye un importante elenco de reglas y símbolos de raíz matemática o susceptibles de ser interpretados mediante conceptos matemáticos. Con todo, la notación musical, lejos de ser un diseño integral, es producto de una larga evolución histórica. En tiempos recientes se han comenzado a proponer escrituras alternativas, de mayor eficiencia, pero la amplia aceptación del modelo tradicional hace que todo cambio resulte lento y difícil.

Altura

Se denomina «altura» al valor percibido del «tono». El tono es una cualidad del sonido relacionada directamente con la frecuencia de oscilación de la onda que lo provoca. Esta frecuencia se mide en hercios (Hz). La altura es la cualidad que permite discriminar sonidos agudos y graves (a mayores frecuencias, sonidos más agudos) y distinguir entre una nota y otra. El oído humano es capaz de percibir vibraciones con frecuencias en un rango de entre 20 y 20.000 Hz. Por debajo de ese rango de frecuencias se sitúan los infrasonidos, y por encima de él, los ultrasonidos. Para ordenar entre sí las alturas relativas de los sonidos, en 1939 se determinó un patrón llamado «diapasón normal *la*» o, también, «tono de referencia», cuyo valor es de 440 Hz.

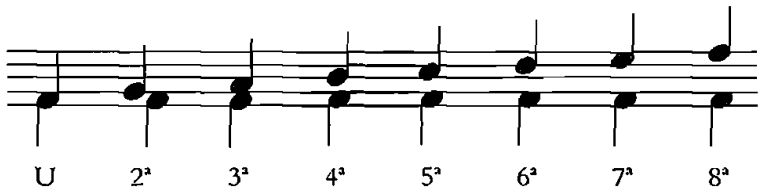
Intervalos

Se denomina «intervalo» a la diferencia de altura entre dos sonidos percibidos por un oyente. Los intervalos se nombran con el ordinal que corresponde a la cantidad de grados de la escala que separan los sonidos que lo forman, incluidos éstos. Esta rebus-

cada definición se comprende a la perfección con un ejemplo: si suenan simultáneamente un *fa* y un *la* más agudo, se oye un intervalo de «tercera» (*fa-sol-la*: tres notas). Entre un *la* y un *fa* más agudo, hay una «sexta» (*la-si-do-re-mi-fa*: seis notas).

Al nombrar el par de sonidos simultáneos que conforman el intervalo, «por defecto» se nombra primero el sonido más grave y a continuación el más agudo. Por ejemplo, una segunda está formada por dos sonidos contiguos de la escala: *do-re; re-mi; mi-fa*... Por su parte, las terceras serán: *do-mi, re-fa, mi-sol, fa-la, sol-si*...

De este modo, el intervalo *do-re* es una segunda, y el intervalo *re-do*, una séptima. El intervalo completo entre dos notas iguales, por ejemplo *do-do*, es una octava. Un intervalo de octava abarca doce semitonos.

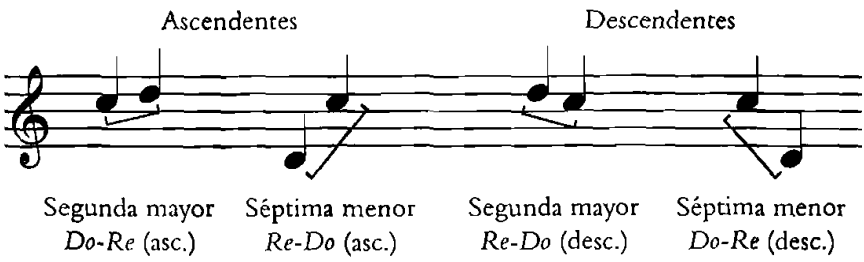


Los intervalos menores o iguales que una octava, en notación musical.

Clasificación de intervalos

Los intervalos se clasifican en mayores, menores o justos, en función de la cantidad de semitonos que contienen. Por ejemplo, los dos sonidos del intervalo de segunda *do-re* están separados por dos semitonos, por lo que su nombre completo es «de segunda mayor». En cambio, el intervalo también de segunda *si-do* tiene sus notas separadas por un semitono, y se le denomina «de segunda menor». Como «mayores» o «menores» se pueden definir todos los intervalos salvo los de cinco, seis, y siete semitonos. Se define el de cinco como «cuarta justa», y el de siete, como «quinta justa». Un caso particular se da a mitad de camino de la octava: en la octava *do-do*, el *fa*♯ se encuentra a seis semitonos del *do* grave (4ª aumentada) y a seis semitonos del *do* agudo (5ª disminuida).

Si los sonidos suenan uno a continuación del otro, estamos frente a un intervalo melódico, y puede ser «ascendente» o «descendente». Al nombrarlos se debe agregar alguna de estas palabras, según corresponda: un intervalo *do-re* ascendente es una segunda mayor ascendente; un intervalo *do-re* descendente, es una séptima menor descendente. Un intervalo *re-do* descendente es una segunda mayor descendente; un intervalo *re-do* ascendente es una séptima menor ascendente. (En función del contexto, puede omitirse la indicación de la direccionalidad del intervalo.)



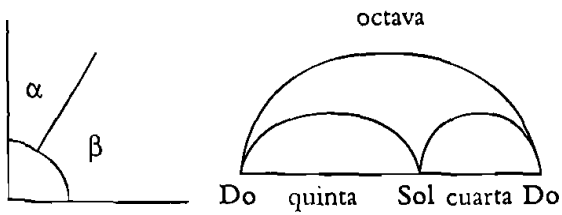
Todas las combinaciones de intervalos melódicos posibles entre dos sonidos.

La tabla siguiente especifica la medida en semitonos de los distintos intervalos:

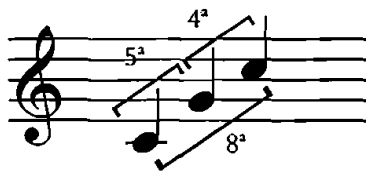
Intervalo	Medida (semitonos)
Unísono	0
2ª menor	1
2ª mayor	2
3ª menor	3
3ª mayor	4
4ª justa	5
4ª aumentada (5ª disminuida)	6
5ª justa	7
6ª menor	8
6ª mayor	9
7ª menor	10
7ª mayor	11
Octava	12

Inversión de intervalos

La «inversión» de un intervalo es otro intervalo que, encadenado al primero, completa los doce semitonos de la octava. Es un concepto similar al de los ángulos complementarios, tal como se muestra:



La inversión de la cuarta justa (cinco semitonos) es la quinta justa (siete semitonos): sol-do *(cuarta justa)* do-sol *(quinta justa). El complemento del ángulo α es lo que le falta para completar los 90°, es decir, el ángulo β.*



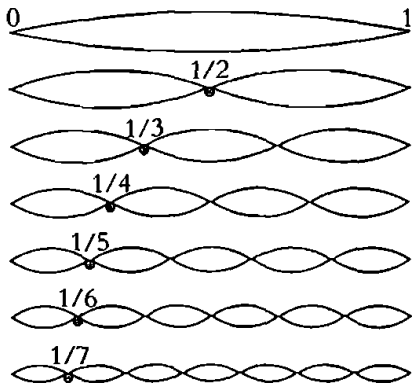
Dos intervalos complementarios.

La siguiente tabla relaciona los intervalos con sus respectivas inversiones:

Intervalo	Medida (semitonos)		Inversión
Unísono	0	12	Octava
2ª menor	1	11	7ª mayor
2ª mayor	2	10	7ª menor
3ª menor	3	9	6ª mayor
3ª mayor	4	8	6ª menor
4ª justa	5	7	5ª justa
4ª aumentada (5ª disminuida)	6	6	5ª disminuida (4ª aumentada)
5ª justa	7	5	4ª justa
6ª menor	8	4	3ª mayor
6ª mayor	9	3	3ª menor
7ª menor	10	2	2ª mayor
7ª mayor	11	1	2ª menor
Octava	12	0	Unísono

El fenómeno armónico

Cuando un instrumento musical hace sonar una nota, a pesar de que ésta tiene una frecuencia objetiva *F*, el oído humano la percibe no como un tono «puro», sino como la suma de infinitos componentes. Una cuerda que vibra no se mueve «ordenadamente» a uno y otro lado, sino que se comporta de una manera bastante caótica. Nuestra percepción de la nota que se tañe con esa cuerda, o de cualquier nota en general, es la suma de un tono principal y una serie de tonos de menor intensidad denominados «armónicos». A diferencia del tono principal, los armónicos sí son tonos puros. Del conjunto de armónicos que integran un sonido, el oído humano percibe hasta el armónico 16.
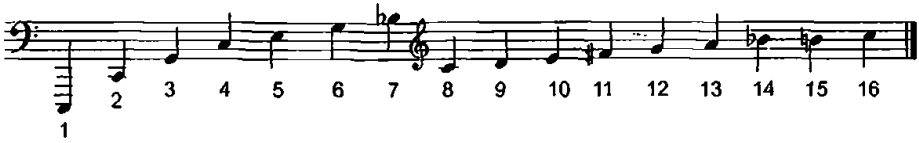


Este esquema ilustra una cuerda vibrando a las frecuencias correspondientes a los primeros armónicos.

Para el caso de un instrumento que toca un *do*, la serie de dieciséis armónicos de esta nota que percibe el oído humano es la siguiente:

N° de armónico	Intervalo	Frecuencia	Nota
1°	Tono fundamental	33 Hz	Do_1
2°	Octava	66 Hz	Do_2
3°	Quinta	99 Hz	Sol_2
4°	Octava	132 Hz	Do_3
5°	Tercera mayor	165 Hz	Mi_3
6°	Quinta	198 Hz	Sol_3
7°	No responde a un intervalo temperado	231 Hz	Sib_3
8°	Octava	264 Hz	Do_4
9°	Segunda mayor	297 Hz	Re_4
10°	Tercera mayor	330 Hz	Mi_4
11°	No responde a un intervalo temperado	363 Hz	$Fa\#_4$
12°	Quinta justa	396 Hz	Sol_4
13°	No responde a un intervalo temperado	429 Hz	La_4
14°	No responde a un intervalo temperado	462 Hz	Sib_4
15°	Séptima mayor	495 Hz	Si_4
16°	Octava	528 Hz	Do_5

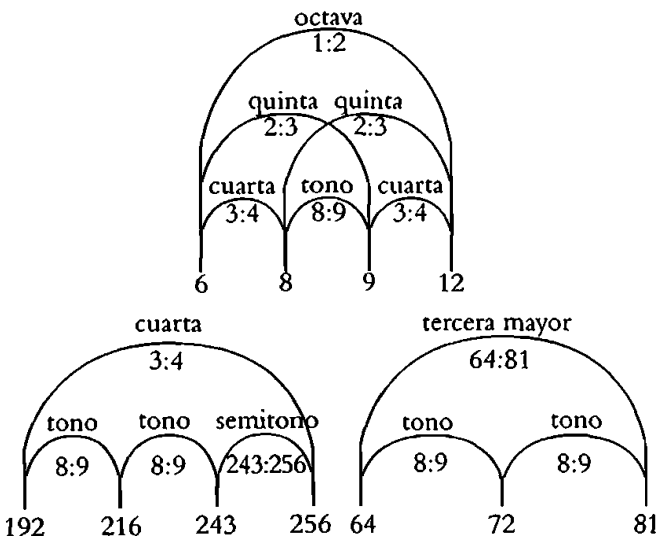
La tabla muestra la relación entre los armónicos y la frecuencia. El 5° armónico, por ejemplo, corresponde a un sonido cuya frecuencia es cinco veces la del tono fundamental, de 33 Hz, es decir, 165 Hz: 33 · 5 = 165.

En notación musical, las notas que corresponden a los dieciséis armónicos son las siguientes:



Consonancia/disonancia

Mas allá de toda subjetividad, los sonidos producidos de manera simultánea pueden percibirse bien como agradables (entonces hablamos de «consonancia»), bien como desagradables, cargados de tensiones (y decimos que son «disonantes»). En el primer capítulo hemos visto que la escuela pitagórica consideraba que la mayor o menor consonancia entre dos sonidos estaba directamente relacionada con la proporción entre la longitud de las cuerdas emisoras de un sonido y otro, es decir, con la proporción entre sus frecuencias. De acuerdo con los pitagóricos, los intervalos de octava (producidos por dos cuerdas en las que la proporción de sus longitudes es 1:2), quinta (de proporción de longitudes 2:3) y cuarta (3:4) son consonantes; los otros intervalos, derivados de los tres básicos, resultan disonantes por las complejas relaciones numéricas que conciernen a sus sonidos. En los gráficos siguientes se especifican los intervalos más importantes y la proporción que guardan entre sí las frecuencias de las notas que los definen:

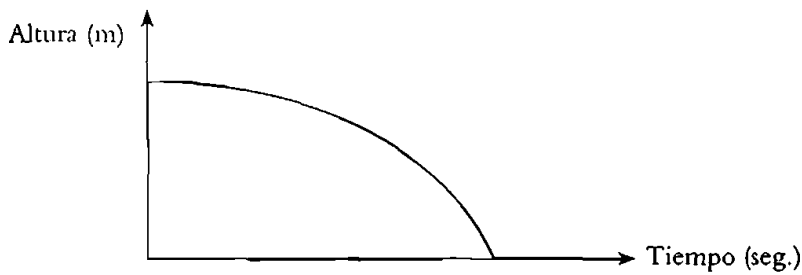


De las numerosas teorías que han surgido desde entonces, merece especial interés la de la «afinidad sonora», que establece que el grado de consonancia entre dos sonidos es mayor cuantos más armónicos presentan en común.

Anotando el tiempo

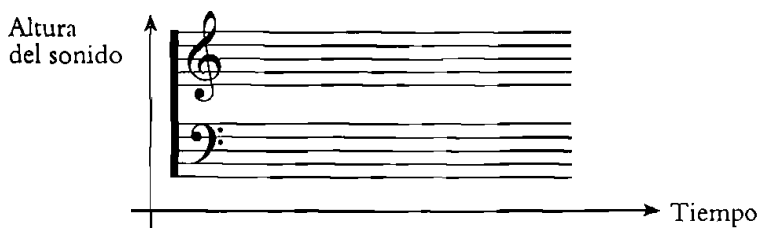
Reflexiones sobre la esencia rítmica permitieron descartar diversas cualidades acerca del modo en que se suceden los sonidos y los silencios. Esto permitió la posibilidad de encontrar una representación más precisa del fenómeno musical.

En física, el tiempo a menudo se representa sobre un eje horizontal, a lo largo del cual éste transcurre de izquierda a derecha. Por ejemplo, al representar gráficamente la posición de un cuerpo en caída libre desde que inicia la caída hasta que llega al suelo, la altura se consigna en el eje vertical (*Y*), y el tiempo, en el horizontal (*X*). La curva obtenida será de esta forma:



Gráfica de la caída libre de un cuerpo.

Un criterio similar es que el que se ha adoptado para representar el tiempo en la música:



La lectura musical se desarrolla de izquierda a derecha, como la lectura de un texto en la escritura occidental. Los ritmos musicales se indican con una secuencia de figuras sobre un eje horizontal.

La música y sus símbolos

Para comprender el sistema de escritura, es necesario identificar las características del «material» representado, es decir, los sonidos, y la simbología que le es propia:

- En primer lugar, debe considerarse la presencia y ausencia de sonido. El sonido y sus articulaciones son el material, pero también lo es el silencio, por contraste con el sonido presente.
- Los sonidos son producto de un movimiento, y tienen un inicio y un fin.

Las figuras y los silencios son los signos que representan la presencia y ausencia de sonido, respectivamente. El mismo grafismo indica su duración relativa con respecto al resto de sonidos y silencios.

Las figuras

Las figuras musicales constituyen un código que indica la duración del sonido que representan. Los elementos que se combinan para lograrlo son:

- Cabeza: pequeño óvalo blanco o negro.
- Plica: segmento vertical, que en un extremo tiene la cabeza y en el otro el corchete (si corresponde).
- Corchetes: pequeñas líneas curvas ubicadas en el extremo opuesto a la cabeza, sobre la plica.



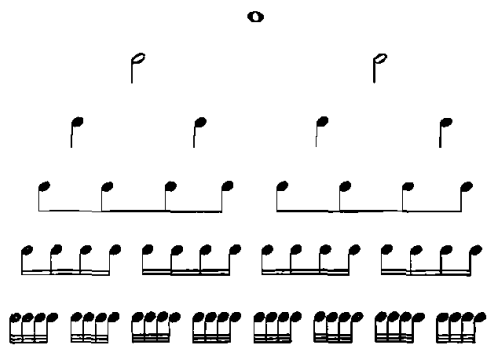
Duraciones relativas de las figuras

Los sonidos y los silencios guardan entre sí una «duración relativa», con independencia de la velocidad de ejecución del fragmento musical. Esta velocidad de ejecución y, por tanto, la «duración real» de las notas en el tiempo viene definida por una indicación metronómica, para lo cual se suele emplear un aparato mecánico de velocidad ajustable pero constante, llamado «metrónomo».

Como ya se ha comentado anteriormente, la duración relativa de las figuras viene determinada por el aspecto de la cabeza (negra o blanca), y la presencia o ausencia de plica y de corchetes.

Así, la redonda y la blanca tienen cabeza blanca, mientras que en todas las demás figuras es negra. Además, todas ellas tienen plica, salvo la redonda. Las corcheas tienen un corchete, las semicorcheas, dos; las fusas tres, y las semifusas, cuatro. A cada una de las distintas figuras se le asigna una duración relativa indicada por un número 2^n para n comprendido entre 0 y 6.

La secuencia de figuras de mayor a menor duración relativa es: redonda, blanca, negra, corchea, semicorchea, fusa y semifusa. La figura base es la redonda, y se le asigna el número 1. Le sigue la blanca, que dura la mitad de una redonda, lo que significa que en el tiempo que dura el sonido de una redonda se pueden articular dos blancas. En el tiempo de articulación de una blanca, se articulan dos negras. En general, la duración de una figura es la mitad de la anterior. El siguiente gráfico ilustra la duración relativa de las figuras, con la redonda en la parte superior de la pirámide y las semifusas en la base:

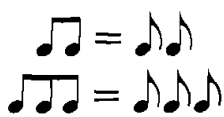


En la siguiente tabla se consignan las duraciones relativas de cada figura:

N	2^n	Nombre	Figura	Duración con respecto a la redonda
0	1	Redonda	𝅝	1
1	2	Blanca	𝅗𝅥	1/2
2	4	Negra	♩	1/4
3	8	Corchea	♪	1/8
4	16	Semicorchea	𝅘𝅥𝅯	1/16
5	32	Fusa	𝅘𝅥𝅰	1/32
6	64	Semifusa	𝅘𝅥𝅱	1/64

El número que caracteriza cada figura indica la cantidad de veces que puede articularse una secuencia exclusiva de dicha figura en sustitución de una redonda. La relación entre las duraciones de las figuras es directa y transitiva: si una blanca equivale a dos negras, y una negra equivale a cuatro semicorcheas, una blanca equivale a ocho semicorcheas.
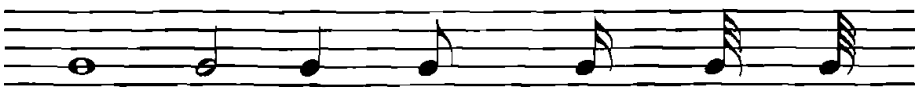
Las figuras con corchete suelen agruparse mediante un trazo que une las plicas, en grupos que responden, en general, al orden establecido por una figura mayor, o vinculado al pulso, como se observa:



Los silencios

El silencio es la contraparte del sonido y el segundo elemento fundamental de la música. Puede pensarse como la base sobre la que se articulan los sonidos, pero en el devenir musical, un silencio es un lapso de tiempo en el que no se articula sonido alguno. En consecuencia, es necesario asignar al silencio una duración exacta. Para representar lapsos de silencio de diferente duración, se ha asignando una serie de signos especiales, con una relación de equivalencia con respecto a las figuras sonoras:

Figuras



Redonda Blanca Negra Corchea Semicorchea Fusa Semifusa



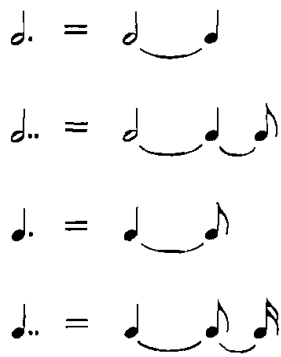
Silencios

Puntillos

Muy a menudo es necesario incrementar la duración relativa de una figura (o de un silencio). Ello se indica mediante un pequeño punto a la derecha de la cabeza de la figura denominado «puntillo». Su presencia indica que la duración relativa

de la nota señalada por la figura debe incrementarse en un 50%. Así, una negra con puntillo equivale a la medida de una negra más la mitad de esa medida, es decir, una corchea. La negra equivale a 1/4; la corchea, a la mitad: 1/8; la negra con puntillo, a 1/4 + 1/8 = 3/8, que significa tres corcheas.

También existe el denominado «doble puntillo», que indica que debe incrementarse la duración de la figura original en un 75%. En el caso, por ejemplo, de una blanca, el primer punto aumenta su duración en una negra, y el segundo, en una corchea. En el caso de una negra, el puntillo alarga la figura en una duración equivalente a una corchea, y el doble puntillo, a una semicorchea:



Anexo II

Una segunda mirada al rol del tiempo en la música

La música nos es dada con el único propósito de establecer un orden en las cosas, incluidos, y en particular, la coordinación entre el hombre y el tiempo.
Igor Stravinsky

La percepción del tiempo es la fuente de toda música y todo ritmo.
Olivier Messiaen

Vivimos el instante: somos presente. Todo es presente. Sólo conocemos el pasado y el presente: el presente fue, a lo sumo, supuesto en el pasado. Quizá, de algún modo, en el pasado se condiciona el presente, pero nunca se anticipa.

Podemos tomar distancia para ver una casa en perspectiva, o mirar a lo lejos el camino, pero el tiempo nos tiene atrapados: no podemos tomar «distancia» del tiempo, no podemos detenerlo para pensar o descansar. Aun así, la humanidad ha sido capaz de experimentar los procesos temporales. El método es simple: se planifica un acontecimiento en el futuro, se espera a que el presente lo alcance y se lo registra en ese instante. Un instante después, llega al pasado... y queda registrado en la memoria.

En el caso de la música ocurre lo mismo: suena en el presente y se completa en la memoria. La música está impregnada de tiempo, consciente o inconscientemente.

Modalidad y tonalidad

Hay al menos dos estilos musicales o modos de entender la música: el «modal» y el «tonal». Los distingue, en esencia, el modo distinto en que uno y otro desarrollan su existencia en el tiempo.

La música más extendida en el mundo occidental es la música tonal. Ese estilo nació en el Barroco, se desarrolló entre los años 1600 y 1750 aproximadamente, y

se caracteriza por proyectarse «hacia delante», hacia el futuro. En cada momento del discurso musical de una obra tonal, un acorde que se oye conduce, por lo general, al siguiente acorde; las tensiones armónicas generan la necesidad de resolverse en un momento de calma. El rol que le toca al acorde en este encadenamiento de tensiones y reposos se denomina «función del acorde».

A partir del Barroco, el sistema tonal vivió un proceso de cambio permanente a través de los siguiente periodos de la música occidental: el Clasicismo y el Romanticismo. Si bien el tonalismo seguía predominando en la mayor parte de la música producida en Occidente, en el ámbito culto las vanguardias musicales de principios del siglo XX fueron apartándose de él para optar por un estilo musical sin tensiones armónicas, denominado «atonal» o «modal».

En el estilo modal, el tiempo se ha interpretado de dos maneras distintas: por una parte, como «eternidad», siendo el ejemplo más conocido el canto gregoriano de la Europa medieval, donde no hay noción de pasado, presente y futuro, es decir, no existe el tiempo. La otra concepción es la del tiempo como «presente continuo»: el acontecimiento sonoro se completa en cada instante, sin que sea necesario un condicionamiento en el momento anterior, ni que el siguiente se vea condicionado. Sólo importa el presente. Además de la música culta de vanguardia, buena parte de la música oriental, algunos folclores sudamericanos o el bebop jazz obedecen a esta segunda lógica.

La particular relación con el tiempo de un estilo y otro, tonal y modal, admite analogías con otras disciplinas artísticas: la música tonal, hacia delante, se asociaría a la danza, y la música modal, por su parte, a la poesía.

Bibliografía

ASSAYAG, G., FEICHTINGER, H.G., RODRIGUES, J.F. (editores): *Mathematics and Music*, Berlín, Springer, 2002.

HOFSTADTER, D.R., *Gödel, Escher, Bach: un eterno y grácil bucle*, Barcelona, Tusquets Editores, 2007.

KOLNEDER, W., *Guía de Bach*, Madrid, Alianza Editorial, 1982.

LOY, G., *Musimathics*, Londres, The MIT Press, 2006.

SAMUEL, C., *Panorama de la música contemporánea*, Madrid, Ediciones Guadarrama, S.L., 1965.

Índice analítico

acento 44, 50, 56, 59
acorde 92, 102, 131, 132, 156
afinación 14-30, 32, 35, 120
  natural 25, 26
  pitagórica 12-14
agudo 14, 61, 62, 104, 143, 144
algoritmo 117, 140, 142
altura 14, 62-71, 104, 125, 143, 149
amalgama 54
armonía 11, 13, 25, 32, 38
armónicos 12-14, 107-111, 121, 146-149
Ars Nova 39, 40, 43
atonal 121, 122, 156
audio digital 112-114, 116

Bach, Johann Sebastian 47, 74, 86-88, 92, 97
Beethoven, Ludwig van 56, 74, 76, 115, 136
belio 105
belleza 12, 101, 102
Berg, Alban 99, 120, 123, 130-131
binario 38, 40-43, 45, 58, 96
bit 103-120

cadenas de Markov 137-138
canon 46-49, 71-75, 83, 86-88
canon rítmico 46, 54
cent 31-32
círculo de quintas 22, 24, 131
claves 59, 65-67, 87
coma pitagórica 24, 25, 29
combinatorio, procedimiento 52, 135
compás 42, 43, 50-60, 72-76, 134-136
consonancia/disonancia 148

criptograma 99
cuantización 120

dados de Mozart 134-136, 140
dodecafonismo 121-133

Edison, Thomas Alva 112
EMI (Experiments in Musical Intelligence) 140
escala 13, 29, 31, 60, 66-67
  cromática 22, 25, 34
  diatónica 26-28, 38
  pitagórica 20-22, 25, 26, 31, 34
  simétrica 93-95
escalado 88-90
exponencial-lineal, crecimiento 17

Fibonacci 99-102
figuras proporcionales 38-44
forma 95-98, 125-130
fracciones 14, 25, 58, 59
frecuencia 14-33, 37, 62-64, 103-113, 143, 146-148
función seno 104

grave 14, 15, 17, 33, 104, 143
Guido d'Arezzo 21

intervalos 14, 16-20, 25-31, 83, 143-146
inversión 47, 71, 77, 78-86, 124-126, 129
  de intervalos, 145-146

medias 34
medida estética 102
melodía 37, 47, 61, 68-74, 77-92, 137-141

Messiaen, Olivier 37, 93, 155
metrónomo 55-57, 89, 150
MIDI 118-120
mínimo común múltiplo 58
modal 155, 156
modo 41, 42
monocordio 12
Mozart, Amadeus 81, 101, 134, 140
música
  de las esferas 11
  estocástica 133

notación musical 38, 59, 143, 144, 148
  alfabética 21
  arábiga 99
  moderna 9, 39, 41, 45, 59-60
  neumática 38, 40, 41
números
  de Fibonacci 101, 102
  de oro 99-102
  enteros 32, 33, 34, 35
  fraccionarios 58
  irracionales 34, 35
  naturales 34
  primos 16, 25
  racionales 33, 35

oído absoluto 18
ondas 103-120

partitura 44, 55, 59-62, 68, 69, 118, 120, 125
percusión 44-49, 54, 56, 101
Pitágoras 14, 34, 35
polirritmia 54-58
prolatio 41-43
proporción 17, 34, 40-42, 89, 148
pulso 37-60

quadrivium 11
quinta del lobo 24, 26, 28

reflexión 71, 76-87
resonancia 15
ritmo 37-49, 51-54, 58-60, 62-69, 149
rotación 71, 81-83, 124, 127, 130

Schönberg 61, 99, 121, 122, 123, 127
series 123-126
serialismo 131-132, 133
símbolos musicales 22, 38, 41, 45, 58, 150-153
simetrías 66, 83, 84, 92-95
síntesis de sonido 111

temperamento igual 29-32, 35, 120
temperamentos 28, 29, 31, 134
tempus 41-43
ternario 38, 40-43, 51, 52, 53, 57, 58
teselación 46, 49
tiempo 37-64, 70-73, 104, 108, 149-152, 155-156
timbre 104, 107, 108, 110, 111
tonal 27, 28, 83, 121-133, 155-156
tono
  puro 107-108
  real 107-108
transformaciones geométricas 70, 99
traslación 71-73, 83-86, 91

Vitry, Philippe de 39, 40, 43

Webern, Anton 82, 83, 99, 122, 129

Xenakis, Iannis 133

La armonía es numérica

Música y matemáticas

Un gran matemático dijo en una ocasión que la música era "el placer que experimenta la mente humana al contar sin darse cuenta de que está contando". Las conexiones entre música y matemáticas son muchas y fascinantes, desde la relación entre armonía y número que asombró a los pitagóricos hasta las ingeniosas técnicas de repetición y traslación empleadas por Bach, Mozart y muchos otros para componer algunas de sus obras maestras.